

Correction (non détaillée)

Partie A

Exercice 1. On a

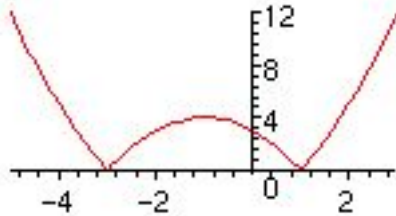
$f(-1, 1) = f(1, -1) = (0, 0)$, donc f n'est pas injective.

$(-2, 0)$ n'a pas d'antécédent (car $x^2 - 1 \geq -1$), donc f n'est pas surjective.

Exercice 2.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x^2 + 2x - 3|$$

- (a) Il suffit d'étudier $x \mapsto x^2 + 2x - 3$ (qui est dérivable) et de faire une symétrie par rapport à l'axe des abscisses quand c'est négatif. Après étude, on obtient



- (b) On a $f^{-1}(\{5\}) = \{-4, 2\}$, $f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$ et

$$\begin{aligned} f^{-1}([2, 4]) &= \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x^2 + 2x - 3 \leq -2 \text{ ou } 2 \leq x^2 + 2x - 3 < 4\} \\ &=]-1 - 2\sqrt{2}, -1 - \sqrt{6}] \cup [-1 - \sqrt{2}, -1[\cup]-1, -1 + \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{6}, -1 + 2\sqrt{2}[. \end{aligned}$$

Partie B

Exercice 3. Voir TD.

Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ et $A = \mathbb{R}_+$.

Exercice 4.

- (a)

$$\sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{10^j} = \frac{3}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

- (b) -i-

$$C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!} \frac{1}{k!(p-k)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{p!}{k!(p-k)!} = C_n^p C_p^k.$$

-ii- On utilise la question précédente puis la formule du binôme de Newton.

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_n^p \sum_{k=0}^p C_p^k (-1)^k = C_n^p (1-1)^p = 0.$$

Partie C

Exercice 5.

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n ou $n+1$ est nécessairement pair. Donc $3n(n+1)$ est divisible par $2 \times 3 = 6$.
 (b) Par récurrence. Vrai pour $n = 0$. On suppose que c'est vrai pour n , on a pour $n+1$,

$$\begin{aligned} 5(n+1)^3 + (n+1) &= 5n^3 + n + 15n^2 + 15n + 6 \\ &\equiv 5 \times 3n(n+1) \pmod{6} \\ &\equiv 0 \pmod{6} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence puis la question précédente.

Exercice 6.

- (a) Tout nombre premier (sauf 2) est impair, donc de la forme $4n+1$ ou $4n-1$.
 (b) Supposons que l'ensemble $\mathcal{P} = \{4n-1 \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } 4n-1 \text{ premier}\}$ soit fini. Alors $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_k\}$. On pose $A = 4(p_1 p_2 \cdots p_k) - 1$.
 -i- Remarquons que $A \equiv -1 \pmod{4}$. Supposons que A n'admette pas de diviseur premier de la forme $4q-1$. Alors, comme A est impair, la décomposition de A en facteurs premiers doit être de la forme $A = (4n_1+1) \cdots (4n_l+1) \equiv 1 \pmod{4}$. D'où une contradiction.
 -ii- $p_1, \dots, p_k$ ne divisent pas A (car $A \equiv -1 \pmod{p_i}$). Donc le diviseur premier (pourtant de la forme $4n-1$) de la question précédente n'est pas dans $\mathcal{P}$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{P}$ est fini.