

Exercice 1

- $3\mathbb{Z}$ est non vide.
- si $x = 3k, y = 3k' \in 3\mathbb{Z}, x - y = 3(k - k') \in 3\mathbb{Z}$ donc $3\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
- si $x = 3k, y \in \mathbb{Z}, xy = 3(ky) \in 3\mathbb{Z}$ donc $3\mathbb{Z}$ stable.
- donc $3\mathbb{Z}$ est un idéal.

Exercice 2

$$\begin{aligned}\bar{k} \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\Leftrightarrow \text{il existe } \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ tel que } \bar{k}\bar{a} = \bar{1} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } a, m \in \mathbb{Z} \text{ tels que } ka = 1 + mn \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } a, m \in \mathbb{Z} \text{ tels que } ka - mn = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{pgcd}(k, n) = 1.\end{aligned}$$

Exercice 3

$\oplus$ est bien une loi de composition interne.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, x \oplus y = y \oplus x$, donc cette loi est commutative.

De plus, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}, x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, donc $\oplus$ est associative.

Posons $e_{\oplus} = 1$. On vérifie que $\forall x \in \mathbb{R}, x \oplus e_{\oplus} = x$. Donc $e_{\oplus}$ est neutre de $\oplus$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\tilde{x}^{\oplus} = 2 - x$. On vérifie que $x \oplus \tilde{x}^{\oplus} = e_{\oplus}$. Donc tout $x \in \mathbb{R}$ possède un inverse pour $\oplus$ (que l'on a noté $\tilde{x}^{\oplus}$).

Donc $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe commutatif.

$\otimes$ est bien une loi de composition interne.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, x \otimes y = y \otimes x$, donc cette loi est commutative.

De plus, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}, x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$, donc $\otimes$ est associative.

Posons $e_{\otimes} = 0$. On vérifie que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{e_{\oplus}\}, x \otimes e_{\otimes} = x$. Donc $e_{\otimes}$ est neutre de $\otimes$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{e_{\oplus}\}$. Posons $\tilde{x}^{\otimes} = \frac{x}{x-1}$. On vérifie que $x \otimes \tilde{x}^{\otimes} = e_{\otimes}$. Donc tout $x \in \mathbb{R}$, différent de $e_{\oplus}$ possède un inverse pour $\otimes$ (que l'on a noté $\tilde{x}^{\otimes}$).

Finalement, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$, donc $\otimes$ est distributive sur $\oplus$.

Donc $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Exercice 4

1. $s_1 = (174)(268)$ et $s_2 = (14)(263)$.
2. $\epsilon(s_1) = \epsilon(174) \times \epsilon(268) = (1) \times (1) = 1$,
 $\epsilon(s_2) = \epsilon(14) \times \epsilon(263) = (-1) \times (1) = -1$.
 $o(s_1) = \text{ppcm}(o(174), o(268)) = \text{ppcm}(3, 3) = 3$,
 $o(s_2) = \text{ppcm}(o(14), o(263)) = \text{ppcm}(2, 3) = 6$.
3. $315 = 105 \times 3$ donc $s_1^{315} = (s_1^3)^{105} = \text{Id}_8$,
 $116 = 19 \times 6 + 2$ donc $s_2^{116} = (s_2^6)^{19} s_2^2 = s_2^2 = (236)$.
4. $s = (174)(268) \circ (14)(263) = (28)(36)(47)$

Exercice 5

$X^2 + 2X + -3 = (X - 1)(X + 3)$. Il suffit donc de trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(1) = P(-3) = 0$.

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 81a + 9b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{9} \\ b = \frac{-10}{9} \end{cases}$$

Donc $P(X) = \frac{1}{9}X^4 - \frac{10}{9}X^2 + 1$.

Exercice 6

1. Les racines de $(2X+1)(X-4)$ sont $\frac{-1}{2}$ et 4, chacune de multiplicité 1. Comme $P(-1/2) = P(4) = 0$, $(2X+1)(X-4)$ divise P .

On pouvait aussi effectuer la division euclidienne de P par $(2X+1)(X-4)$.

2. On effectue les divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X-4) Q(X) + (-X^2 + 7X + 4) \\ Q(X) &= (-X-6) (-X^2 + 7X + 4) + (48X + 24) \\ -X^2 + 7X + 4 &= (-X/24 + 1/6) (48X + 24) + 0 \end{aligned}$$

Donc $D(X) = \frac{1}{48}(48X + 24) = X + \frac{1}{2}$

3. Il suffit de remonter l'algorithme précédent :

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{48}(48X + 24) \\ &= \frac{1}{48} \left[Q(x) - (-X-6)(-X^2 + 7X + 4) \right] \\ &= \frac{1}{48} \left[Q(X) - (-X-6)(P(X) - (X-4)Q(X)) \right] \\ &= \frac{1}{48} \left[(X+6)P(X) + (-X^2 - 2X + 25)Q(X) \right] \end{aligned}$$

Donc $R(X) = \frac{1}{48}X + \frac{1}{8}$ et $T(X) = \frac{-1}{48}X^2 - \frac{1}{24}X + \frac{25}{48}$.