Initiation à l'Analyse Numérique et Maple
Examen du 23 mai 2005, durée 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. L'usage de tout document est interdit.

Exercice 1. Questions de cours et application.

Soit f une fonction continue de l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soient $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a,b]$. Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en les points $x_0, \ldots, x_n$.

(a) Exprimer P à l'aide des différences divisées de Newton.

(b) Donner les relations qui permettent de calculer les différences divisées de f.

(c) Calculer en fonction de n le nombre de divisions nécessaires au calcul des différences divisées $f[x_0]$, $f[x_0,x_1]$,…, $f[x_0,\ldots,x_n]$.

(d) Soit f telle que $f(1/2)=1$, $f(2)=-2$, $f(4)=-5/2$ et $f(6)=-175$. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en $x_0=1/2$, $x_1=2$, $x_2=4$ et $x_3=6$ en utilisant la méthode des différences divisées de Newton.

Exercice 2. Soit M une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

- M est inversible
- M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_i \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

(a) Montrer (sans tenter de la calculer) que M admet une décomposition LU.

(b) Soient la matrice M et le vecteur b

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

-i- En détaillant les étapes, calculer la décomposition LU de la matrice M.

-ii- Résoudre, en utilisant éventuellement la décomposition LU, le système linéaire $Ax=b$ (détailler les étapes qui mènent au résultat).

Exercice 3. Soit la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim I(f) = af(-1) + bf\Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}\Big) + cf\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + df(1).$$

Le but est de déterminer les coefficients a, b, c et d ainsi que l'ordre de la formule de quadrature ainsi obtenue et d'établir une majoration de l'erreur pour f assez régulière.

(a) En écrivant que la formule de quadrature I est exacte pour les polynômes 1, x, x^2, x^3 montrer que a, b, c et d vérifient le système linéaire

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ -a-\dfrac{b}{\sqrt{5}}+\dfrac{c}{\sqrt{5}}+d=0 \\ a+\dfrac{b}{5}+\dfrac{c}{5}+d=\dfrac{2}{3} \\ -a-\dfrac{b}{5\sqrt{5}}+\dfrac{c}{5\sqrt{5}}+d=0 \end{cases}$$

(b) Résoudre ce système linéaire.

(c) Calculer $I(x^4)$, $I(x^5)$, $I(x^6)$, $I(x^7)$ et comparer respectivement ces valeurs à $\int_{-1}^{1} x^4 dx$, $\int_{-1}^{1} x^5 dx$, $\int_{-1}^{1} x^6 dx$, $\int_{-1}^{1} x^7 dx$. Quel est l'ordre de précision de la formule de quadrature I ?

(d) Soit $f \in \mathcal{C}^6([-1,1])$ et soit P_f le polynôme d'interpolation de Hermite de f en $(-1,1)$, $\big(-\frac{1}{\sqrt{5}},2\big)$, $\big(\frac{1}{\sqrt{5}},2\big)$, $(1,1)$ (c'est à dire le polynôme d'interpolation de Hermite de f tel que $P(-1)=f(-1)$, $P(-\frac{1}{\sqrt{5}})=f(-\frac{1}{\sqrt{5}})$, $P'(-\frac{1}{\sqrt{5}})=f'(-\frac{1}{\sqrt{5}})$, $P(\frac{1}{\sqrt{5}})=f(\frac{1}{\sqrt{5}})$, $P'(\frac{1}{\sqrt{5}})=f'(\frac{1}{\sqrt{5}})$ et $P(1)=f(1)$).

-i- Quel est le degré maximal de P_f ?

-ii- Montrer soigneusement que

$$I(f)=I(P_f)=\int_{-1}^{1}P_f(x)dx$$

-iii- Appliquer le théorème de l'erreur à $|f(x)-P_f(x)|$ pour $x\in[-1,1]$.

-iv- Montrer que

$$\left|\int_{-1}^{1}f(x)dx-I(f)\right|\leq\frac{32}{525\times 6!}\max_{[-1,1]}|f^{(6)}|$$

Exercice 4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour $n\geq 0$. Écrire une procédure Maple qui calcule pour n donné le terme u_n (n entier naturel).

Exercice 5. Que fait la procédure suivante ?

```
xo:=proc(n)
local x0, i, f, df;
f:=x->(x^2-5); df:=D(f); x0:=1.4;
for i from 1 to n do
x0:=x0-f(x0)/df(x0)
od;
print(x0);
end proc;
```

Exercice 6. On désire approcher numériquement $7^{1/5}$. Pour cela on propose 3 méthodes itératives du type $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ avec x_0 bien choisi et φ une fonction donnée.

(a) Méthode notée (A) :

$$(A)\begin{cases}x_0 \text{ choisi,}\\ x_{n+1}=g(x_n)\quad\text{avec}\quad g(x)=x-\dfrac{x^5-7}{x^2}\end{cases}$$

Vérifier que $g(7^{1/5})=7^{1/5}$ et calculer $g'(x)$. Cette méthode converge-t-elle vers $7^{1/5}$?

(b) Méthode notée (B) :

$$(B)\begin{cases}x_0 \text{ choisi,}\\ x_{n+1}=h(x_n)\quad\text{avec}\quad h(x)=x-\dfrac{x^5-7}{12}\end{cases}$$

Vérifier que $h(7^{1/5})=7^{1/5}$ et calculer $h'(x)$. Cette méthode converge-t-elle vers $7^{1/5}$?

(c) Méthode notée (C) :

$$(C)\begin{cases}x_0 \text{ choisi,}\\ x_{n+1}=k(x_n)\quad\text{avec}\quad k(x)=\dfrac{29}{30}x+\dfrac{7}{30x^4}\end{cases}$$

Vérifier que $k(7^{1/5})=7^{1/5}$ et calculer $k'(x)$. Cette méthode converge-t-elle vers $7^{1/5}$?

(d) On décide de choisir $x_0=1$ et la méthode (C). A l'aide de la calculatrice donner x_1, x_2, x_3 et x_4 avec 6 chiffres après la virgule.

(e) On pose $f(x)=x^5-7$. Définir la méthode de Newton associée à f. Donner un x_0 pour lequel un théorème du cours assure la convergence de la méthode de Newton. Pour ce x_0 choisi, calculer x_1, x_2, x_3 et x_4 avec 6 chiffres après la virgule.

(f) Les données expérimentales des questions (e) et (d) (vitesse de convergence) étaient-elles prévisibles ?