L'USAGE DE LA CALCULATRICE EST AUTORISÉ. L'USAGE DE TOUT DOCUMENT EST INTERDIT.

Exercice 1. Matrice flèche

Soient A la matrice carrée de taille 4 et b le vecteur de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer, si elle existe, la décomposition LU de la matrice A . [on veillera à donner tous les détails des calculs]
- Résoudre en utilisant éventuellement la décomposition LU le système linéaire $Ax = b$.
- Quelles particularités ont les matrices L et U

Soit M une matrice carrée de taille n ($n \geq 1$) ayant une structure flèche, c'est à dire la structure suivante,

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On suppose de plus que $\det(M) \neq 0$ et que $a_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

- Montrer (sans la calculer) que M admet une décomposition LU .
- On suppose que les matrices L et U de la décomposition $M = LU$ sont de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & e_1 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots & e_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & d_{n-1} & e_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Par identification des coefficients des $n - 1$ premières lignes et colonnes de M et LU exprimer les coefficients d_i , f_i et e_i en fonction de a_i , c_i et b_i pour $1 \leq i \leq n - 1$. Terminer l'identification (dernière ligne, dernière colonne) et montrer que

$$d_n = \dots$$

Ainsi la structure flèche est conservée.

- Comptez le nombre d'opérations élémentaires (i.e. additions, soustractions, multiplications, divisions) nécessaires pour calculer la décomposition LU de M .

Exercice 2. Problème

L'intervalle $[a, b]$ est fixé dans tout le problème.

On admettra le résultat suivant. Soit g une fonction définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$ telle que $g(a) = g(b) = 0$, $g''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors

- $g(x)$ ne s'annule en aucun x de $]a, b[$
- $g(x) < 0$ pour tout x dans $]a, b[$.

Soit f une fonction définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$ telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in]a, b[$. On suppose de plus qu'il existe m_1 et m_2 tel que pour tout $x \in]a, b[$ on a $0 < m_1 \leq f'(x)$ et $0 < f''(x) \leq m_2$.

- Démontrer qu'il existe un unique c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

On se propose d'approcher c par une suite convenablement choisi.

- Soit p_0 l'unique polynôme de degré 1 tel que $p_0(a) = f(a)$, $p_0(b) = f(b)$ et soit c_1 dans $]a, b[$ tel que $p(c_1) = 0$.
  - Exprimer p_0 et c_1 en fonction de a , b , $f(a)$, $f(b)$.
  - En appliquant le **résultat admis** à la fonction $g(x) = f(x) - p_0(x)$ démontrer que $a < c_1 < c$.
  - Rappeler le théorème de l'estimation de l'erreur pour l'interpolation de Lagrange et en déduire que

$$|f(c_1)| \leq \frac{1}{2} m_2 |(c_1 - a)(c_1 - b)|. \quad [\text{ne pas oublier ce que vaut } p_0(c_1)!]$$

(c) Soit $(c_n)_{n \geq 0}$ la suite récurrente définie de la façon suivante :

- $c_0 = a$
- pour tout $n \geq 0$, on note p_n l'unique polynôme de degré 1 tel que $p_n(c_n) = f(c_n)$, $p_n(b) = f(b)$; et on éfinit c_{n+1} par $p_n(c_{n+1}) = 0$.

- i- Mettre explicitement cette suite récurrente sous la forme $c_{n+1} = \varphi(c_n)$ (i.e. exprimer c_{n+1} en fonction de c_n , b , $f(c_n)$ et $f(b)$).
- ii- A l'aide de la question (b) (appliquer à l'intervalle $[c_n, b]$) démontrer que $(c_n)_{n \geq 0}$ est une suite strictement croissante contenue dans l'intervalle $[a, c]$ et que

$$(1) \quad |f(c_{n+1})| \leq \frac{1}{2} m_2 |(c_{n+1} - c_n)(c_n - b)|$$

- iii- Démontrer à l'aide du théorème des accroissements finis que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n - c| \leq \frac{|f(c_n)|}{m_1}.$$

- iv- A l'aide des inégalités

Exercice 3. Pour toute fonction f continue sur l'intervalle $[0, 1]$ on définit

$$I(f) = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{et} \quad J(f) = c_0 f(0) + c_1 f(x_1),$$

où x_0 , c_0 et c_1 sont des constantes. Le but est d'approcher $I(f)$ par la formule de quadrature $J(f)$.

- (a) Déterminer x_0 , c_0 , c_1 tels que J soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
- (b) Calculer $J(x^3)$, et $I(x^3)$. En déduire le degré de précision de la formule de quadrature J .
- (c) On va mettre en évidence le lien entre précision et estimation de l'erreur. Soient f une fonction $\mathcal{C}^3([0, 1])$ et p son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points 0, x_1 et 1 (surtout ne pas calculer p).

- i- Préciser le degré (maximum) de p et montrer que

$$I(p) = J(p) = J(f).$$

- ii- Donner le théorème du cours sur l'estimation de l'erreur $|p(x) - f(x)|$ pour tout $x \in [0, 1]$ et montrer que

$$\forall x \in [0, 1] \quad |p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{9} \max_{y \in [0, 1]} |f^3(y)|.$$

- iii- A l'aide des questions -i- et -ii- montrer que

$$|J(f) - I(f)| \leq \frac{1}{9} \max_{y \in [0, 1]} |f^3(y)|.$$

[On rappelle que pour toute fonction g on a l'inégalité $|\int_0^1 g(x) dx| \leq \int_0^1 |g(x)| dx$.]