Initiation à l'Analyse Numérique et Maple
Examen du 24 juin 2005, durée 2h

L'usage de la calculatrice est autorisé. L'usage de tout document est interdit.

Exercice 1. Questions de cours.

(a) Donner la définition de la formule de Newton-Cotes fermée à $n+1$ points de l'intervalle $[a,b]$.

(b) Donner la définition de l'ordre d'une formule de quadrature.

Exercice 2. Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un paramètre réel variable.

(a) Discuter selon la valeur de α de l'existence de la décomposition LU de la matrice A.

(b) On prend $\alpha = 0$. Déterminer la décomposition LU de la matrice A [donner les étapes du calcul]. Résoudre en utilisant la décomposition LU le système $Ax = b$ avec ${}^t b = (-1, 0, 1, 2)$.

Exercice 3. Soit $\lambda > 0$. On veut résoudre l'équation suivante

$$\lambda \exp(x) = x \tag{1}$$

(a) Discuter du nombre de racines en fonction de la valeur de λ.

(b) Dans le cas où l'équation (1) admet deux racines positives $r_1 < r_2$, on se propose d'approcher numériquement r_1 et r_2. On propose deux méthodes itératives du type x_0 bien choisi et $x_{n+1} = g(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec

$$g_1(x) = \lambda \exp(x),$$
$$g_2(x) = \ln(x) - \ln(\lambda).$$

Pour chaque méthode et chaque racine, on montrera, soit la possibilité de converger, soit la divergence de la suite définie par les méthodes itératives.

(c) On prend $\lambda = 1/10$. Approcher numériquement la valeur de r_1 avec la méthode de votre choix. On donnera une valeur x_0 en justifiant ce choix i.e. en démontrant que pour votre choix de x_0 la méthode itérative choisie converge vers r_1. A l'aide de la calculatrice donner x_0, x_1, x_2, x_3 et x_4.

Exercice 4. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1(I)$ où $I = [a,b]$. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a < x_n < y_n < b, \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = b.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux quatre points a, x_n, y_n et b et on définit les réels

$$A_n = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}, \qquad B_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}, \qquad C_n = \frac{f(b) - f(y_n)}{b - y_n}.$$

(a) À l'aide de la méthode des différences divisées (avec comme « colonne de départ » les points d'interpolation a, x_n, y_n et b) montrer que P_n s'écrit sous la forme

$$P_n(x) = f(a) + \alpha_n(x-a) + \beta_n(x-a)(x-x_n) + \gamma_n(x-a)(x-x_n)(x-y_n)$$

et donner les expressions de α_n, β_n et γ_n en fonction notamment de A_n, B_n et C_n.

(b) Calculer, en fonction de f et f', les limites de A_n, B_n et C_n quand n tend vers $+\infty$ puis celles de α_n, β_n et γ_n.

(c) On définit le polynôme Q par, $\forall x \in I$,

$$Q(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\Big(\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2} - \frac{f'(a)}{b-a}\Big) + (x-a)^2(x-b)\Big(\frac{f'(b)}{(b-a)^2} - 2\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^3} + \frac{f'(a)}{(b-a)^2}\Big)$$

À l'aide de la question (b) établir que, pour tout $x \in I$, la quantité $|P_n(x) - Q(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(d) Calculer $Q(a)$, $Q(b)$, $Q'(a)$ et $Q'(b)$ en fonction de f et f'. Quel est ce polynôme Q ? (justifier soigneusement votre réponse)

(e) On suppose désormais que $f \in \mathcal{C}^4(I)$. On pose $M = \max_{t\in I} |f^{(4)}(t)|$. Retrouver uniquement à l'aide de l'estimation de l'erreur $|f(x) - P_n(x)|$ donnée par le cours, l'estimation de l'erreur $|f(x) - Q(x)|$ pour tout $x \in I$.

(f) Donner la meilleure constante k_1 telle que $\forall x \in I, \quad |f(x) - Q(x)| \leq k_1 M$. ($k_1$ ne dépend que de a et de b.)

(Question bonus) Montrer que $\displaystyle\int_a^b (f''(x) - Q''(x))^2 dx \leq \frac{(b-a)^5}{720} M^2$. [Indication : intégrer par parties et utiliser la conclusion de (e)]