Université de Rouen
L2 de Mathématiques - Informatiques
Année 2005-2006

Initiation à l'Analyse Numérique et Maple
Examen du 12 septembre 2006, durée 3h

L'USAGE DE LA CALCULATRICE EST AUTORISÉ. L'USAGE DE TOUT DOCUMENT EST INTERDIT.

Exercice 1. Questions de cours

(a) Donner la définition de la méthode de Newton pour la recherche des solutions de l'équation $f(x) = 0$. L'adop

(b) Donner le théorème du cours qui assure la convergence de la méthode de Newton (on précisera bien toutes les hypothèses).

Exercice 2. Soit c un paramètre réel et soit la suite x_n définie par

$$\begin{cases} x_0 \text{ dans } \mathbb{R},\ x_0 \neq 1 \\ x_{n+1} = 2 - (1+c)x_n + cx_n^3 \end{cases}$$

(a) Trouver une condition suffisante sur c telle que la suite x_n converge vers 1 pour x_0 bien choisi dans un voisinage de 1 (i.e. suffisamment proche de 1).

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de c la convergence est-elle quadratique ?

Exercice 3. Soit f une fonction régulière telle que $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, $f(2) = 5$ et $f(5) = -2$.

(a) Calculer, à l'aide de la méthode des différences divisées de Newton, le polynôme d'interpolation de Lagrange, noté p, de la fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 5$.

(b) On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[0,5]$ et que $\max_{y\in[0,5]} |f^{(4)}(y)| \leq 1$. Calculer $p(1,5)$ et estimer l'erreur $|p(1,5) - f(1,5)|$.

Exercice 4. Soit α un paramètre réel et soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ -\alpha & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\det(A)$ en fonction de α. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle inversible ?

(b) Donner une condition suffisante sur α pour que la matrice A admette une décomposition LU.

(c) On prend $\alpha = -1$. Calculer la décomposition LU de A et résoudre le système

$$Ax = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Maple.
Soient les deux procédures `tins` et `ltins` en Maple :

```
tins:=proc (f,a,b)
local w;
w:=evalf((b-a)/6*(f(a)+4*f((a+b)/2)+f(b)));
return w;
end proc;
```

```
ltins:=proc(f,a,b,N)
local v,h,i;
v:=0;
h:=(b-a)/N;
for i from 0 to N-1 do
v:=v+tins(f,a+i*h,a+(i+1)*h);
od;
return v;
end proc;
```

(a) Que calculent `tins` et `ltins` respectivement ?

(b) On rentre sous Maple `f :=x-> cos(x)`. Pour `N` très grand quelle sera approximativement la valeur retournée par Maple `ltins(f,0,Pi/2,N)` ?

(c) Calculer le nombre d'opérations élémentaires (c'est à dire addition, soustraction, multiplication, division en excluant l'évaluation de f) de `tins` et `ltins` (pour `ltins` en fonction de `N`).

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx,$$

on considère la formule de quadrature :

$$I(f) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) \simeq \int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

(a) On suppose que $I(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$ (i.e. $\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \quad I(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\, dx$). Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X],\ (P, (X - a_1)(X - a_2)) = 0.$$

En déduire que $(X - a_1)(X - a_2)$ est orthogonal à 1 et X. Écrire $(X - a_1)(X - a_2)$ sous la forme $X^2 + bX + c$. Déterminer b et c. En déduire alors a_1, a_2 et enfin α_1, α_2.

(b) Vérifier que $I(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_3[X]$, est elle exacte sur $\mathbb{R}_4[X]$?