Université de Rouen
L2 Math - L2 Info
Année 2007-2008

Analyse Numérique
Gauss et Cholesky

1. Pivot de Gauss

1.1. Un exemple. Soit à résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Procédons à l'élimination de Gauss ; la 1ère étape est[1]

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{qui donne} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 11/2 & 9/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

La 2ème étape est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 11/2 & 9/2 & 7/2 \end{pmatrix} \quad \text{qui donne} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 75 \end{pmatrix}$$

Enfin la dernière étape consiste en

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 75 \end{pmatrix} \quad \text{qui donne} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 73 \end{pmatrix}$$

Les mêmes transformations appliquées au vecteur b,

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{nous donne} \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 53/2 \\ -16 \\ 292 \end{pmatrix}.$$

Par remontée du système on trouve

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

En termes matriciels, la 1ère étape consiste à établir $A^{(2)} = E_1 A$ avec

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 11/2 & 9/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

et $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis $A^{(3)} = E_2 P_2 A^{(2)}$ avec

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 75 \end{pmatrix},$$

[1] Deviner ce que veulent dire les flèches et nombres placés à droite des matrices !

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, on obtient $A^{(4)} = E_3 A^{(3)}$ avec

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 73 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $A^{(4)}$ est triangulaire supérieure et est donnée par $A^{(4)} = E_3E_2P_2E_1A$. Simultanément on calcule $E_3E_2P_2E_1b$ pour résoudre $A^{(4)}x = E_3E_2P_2E_1b$.

1.2. **Cas général.**

Démonstration. Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice carrée de taille n inversible.
Étape 1 : posons $A^{(1)} = (a^{(1)}_{i,j})_{1\le i,j\le n} = A$. Comme $A^{(1)}$ est inversible, il existe au moins un coefficient de la 1ère colonne de $A^{(1)}$ qui est non nul. Quitte à permuter la 1ère ligne avec une ligne i on a $\widetilde{A}^{(1)} = P_1 A^{(1)}$ avec $\widetilde{a}^{(1)}_{1,1} \neq 0$ (la matrice P_1 étant éventuellement la matrice identité). Pour éliminer les coefficients de la 1ère colonne des lignes i pour $i \ge 2$, on multiplie $\widetilde{A}^{(1)}$ (à gauche) par E_1 avec

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\widetilde{a}^{(1)}_{2,1}/\widetilde{a}^{(1)}_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\widetilde{a}^{(1)}_{3,1}/\widetilde{a}^{(1)}_{1,1} & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\widetilde{a}^{(1)}_{n-1,1}/\widetilde{a}^{(1)}_{1,1} & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ -\widetilde{a}^{(1)}_{n,1}/\widetilde{a}^{(1)}_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient $A^{(2)} = E_1 \widetilde{A}^{(1)}$

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{a}^{(1)}_{1,1} & \widetilde{a}^{(1)}_{1,2} \ \cdots \ \cdots \ \widetilde{a}^{(1)}_{1,n} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \left((a^{(2)}_{i,j})_{2\le i,j\le n} \right) \end{array}\right)$$

Étape 2 : les matrices E_1 et $\widetilde{A}^{(1)}$ étant inversibles, il existe au moins un coefficient i_0 tel que $i_0 \ge 2$ et $a^{(2)}_{i_0,2} \neq 0$ (sinon les deux premières colonnes de $A^{(2)}$ seraient liées). Quitte à permuter la ligne 2 et la ligne i_0, on a donc $\widetilde{A}^{(2)} = P_2 A^{(2)}$ (où P_2 est la matrice identité ou une matrice de permutation de lignes) avec

$$\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{a}^{(1)}_{1,1} & \widetilde{a}^{(1)}_{1,2} \ \cdots \ \cdots \ \widetilde{a}^{(1)}_{1,n} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \left((\widetilde{a}^{(2)}_{i,j})_{2\le i,j\le n} \right) \end{array}\right) \qquad \text{et } \widetilde{a}^{(2)}_{2,2} \neq 0.$$

Pour éliminer les termes $\widetilde{a}_{i,2}^{(2)}$ pour $i \geq 3$, il suffit de multiplier (à gauche) $\widetilde{A}^{(2)}$ par E_2

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\widetilde{a}_{3,2}^{(2)}/\widetilde{a}_{2,2}^{(2)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -\widetilde{a}_{4,2}^{(2)}/\widetilde{a}_{2,2}^{(2)} & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -\widetilde{a}_{n,2}^{(2)}/\widetilde{a}_{2,2}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir $A^{(3)} = E_2\widetilde{A}^{(2)}$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1,1}^{(1)} & \widetilde{a}_{1,2}^{(1)} & \widetilde{a}_{1,3}^{(1)} & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & \widetilde{a}_{2,2}^{(2)} & \widetilde{a}_{2,3}^{(2)} & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \multicolumn{3}{c}{\left(\left(a_{i,j}^{(3)}\right)_{3\leq i,j\leq n} \right)} \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Comme $A^{(3)}$ est inversible (E_2 et $\widetilde{A}^{(2)}$ le sont), P_3 désignant une matrice permutant deux lignes ou la matrice identité on a $\widetilde{A}^{(3)} = P_3A^{(3)}$

$$\widetilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1,1}^{(1)} & \widetilde{a}_{1,2}^{(1)} & \widetilde{a}_{1,3}^{(1)} & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & \widetilde{a}_{2,2}^{(2)} & \widetilde{a}_{2,3}^{(2)} & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \multicolumn{3}{c}{\left(\left(\widetilde{a}_{i,j}^{(3)}\right)_{3\leq i,j\leq n} \right)} \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix} \qquad \text{et } \widetilde{a}_{3,3}^{(3)} \neq 0$$

... Étape k : on suppose que l'on a obtenu la matrice $A^{(k)}$ dont les $k-1$ premières colonnes sont remplies de zéros sous la diagonale et $A^{(k)}$ inversible, de la forme

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1,1}^{(1)} & \widetilde{a}_{1,2}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & \widetilde{a}_{2,2}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \widetilde{a}_{k-1,k-1}^{(k-1)} & & & \\ \vdots & \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & \multicolumn{3}{c}{\left(\left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{k\leq i,j\leq n} \right)} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

La matrice $A^{(k)}$ étant inversible, quitte à permuter la ligne k avec une ligne i_0 (avec $i_0 \geq k+1$), on a $\widetilde{A}^{(k)} = P_k A^{(k)}$ telle que

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix}
\widetilde{a}_{1,1}^{(1)} & \widetilde{a}_{1,2}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{1,n}^{(1)} \\
0 & \widetilde{a}_{2,2}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{2,n}^{(2)} \\
\vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \widetilde{a}_{k-1,k-1}^{(k-1)} & & & \\
\vdots & \vdots & & 0 & & & \\
\vdots & & & \vdots & & \left(\left(\widetilde{a}_{i,j}^{(k)}\right)_{k \leq i,j \leq n} \right) & \\
\vdots & & & \vdots & & & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & & &
\end{pmatrix} \quad \text{et } \widetilde{a}_{k,k}^{(k)} \neq 0.$$

On peut alors procéder à l'élimination par la multiplication (à gauche) de $\widetilde{A}^{(k)}$ par E_k, $A^{(k+1)} = E_k \widetilde{A}^{(k)}$ avec

$$E_k = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & & & 0 & \cdots & & & 0 \\
0 & 1 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & \mathbf{O} & & \\
 & & & \ddots & & \vdots & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & 0 \\
 & & & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & & & -\widetilde{a}_{k+1,k}^{(k)}/\widetilde{a}_{k,k}^{(k)} & 1 & 0 & & \\
 & & \mathbf{O} & & & -\widetilde{a}_{k+2,k}^{(k)}/\widetilde{a}_{k,k}^{(k)} & 0 & 1 & & \\
 & & & & & \vdots & & & \ddots & \\
 & & & & & -\widetilde{a}_{n,k}^{(k)}/\widetilde{a}_{k,k}^{(k)} & & & & 1
\end{pmatrix}$$

et $A^{(k+1)}$ de la forme

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix}
\tilde{a}^{(1)}_{1,1} & \tilde{a}^{(1)}_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \tilde{a}^{(1)}_{1,n} \\
0 & \tilde{a}^{(2)}_{2,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \tilde{a}^{(2)}_{2,n} \\
\vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \tilde{a}^{(k-1)}_{k-1,k-1} & \cdots & \cdots & \tilde{a}^{(k-1)}_{k-1,n} \\
\vdots & \vdots & & & a^{(k)}_{k,k} & \cdots & a^{(k)}_{k,n} \\
\vdots & \vdots & & & 0 & & \\
\vdots & & & & \vdots & \multicolumn{2}{c}{\left((a^{(k+1)}_{i,j})_{k+1 \le i,j \le n} \right)} \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
0 & \cdots & \cdots & & 0 & &
\end{pmatrix}.$$

Après $n-1$ étapes on obtient $A^{(n)} = \left(E_{n-1}P_{n-1}\cdots E_1P_1\right)$ triangulaire supérieure. La matrice M définie par $M = E_{n-1}P_{n-1}\cdots E_1P_1$ vérifie le résultat demandé. Comme E_i et P_i sont inversibles pour tout $1 \le i \le n-1$, M est inversible. Résoudre $A^{(n)}x = Mb$ est donc équivalent à résoudre $Ax = b$. □

Voici une procédure Maple élémentaire qui exécute la méthode du pivot de Gauss, sans permutation de ligne.

```
restart;with(linalg): #charge le paquet linalg qui ajoute des
#   fonctions Maple concernant l'algèbre linéaire
gauss:=proc(A,b)
local AA,bb,i,j,k,p,n,solx;
n:=coldim(A);
AA:=matrix(n,n);  # AA matrice carrée vide de taille de n
AA:=copy(A);  # si on fait AA:=A alors toute modification faite sur
bb:=copy(b);  # AA l'est aussi sur A, on utilise donc copy, idem pour b
solx:=vector(n);  # solx vecteur de taille n
#élimination
for k to n-1 do
    for i from k+1 to n do
        if (AA[k,k]=0) then error (`pivot nul`) fi;
        p:=AA[i,k]/AA[k,k];
        for j from k+1 to n do
            AA[i,j]:=AA[i,j]-AA[k,j]*p;
        od;
        bb[i]:=bb[i]-bb[k]*p;
        AA[i,k]:=0;
    od;
od;
# remontée
solx[n]:=bb[n]/AA[n,n];
i:=n-1;
```

```
for i from n-1 to 1 by -1 do
solx[i]:=(bb[i]-add(AA[i,j]*solx[j],j=i+1..n))/AA[i,i];
od;
evalm(solx);
end proc;
```

Exercice 1. Recompter le nombre de multiplications effectuées en fonction de n dans le programme précédent. Faire une version `gauss1` qui permute les lignes si nécessaire et utilise les fonctions Maple `addrow`, `swaprow` et une version `gauss2` qui utilise la stratégie du pivot partiel.

1.3. **Pivots non nuls.** On démontre par récurrence qu'il n'est pas nécessaire de permuter les lignes (i.e. pour tout $1 \leq k \leq n$ $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$) si et seulement si toutes les sous-matrices principales de A sont inversibles. Clairement Δ_1 est inversible si et seulement si $\det \Delta_1 = a_{1,1} \neq 0$; l'élimination est possible avec la ligne 1 de $A^{(1)} = A$. Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ on ait $a_{i,i}^{(i)} \neq 0$. Dans le processus d'élimination jusqu'à l'étape $k-1$, aucune permutation de ligne n'a été nécessaire, ainsi $A^{(k)} = E_{k-1}E_{k-2}\cdots E_1 A^{(1)}$ et $\widetilde{A}^{(i)} = A^{(i)}$ $\forall i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Rappelons que le déterminant d'une matrice est inchangé quand on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes. Chaque étape $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ consiste à ajouter aux lignes $j \geq i+1$ un facteur de la ligne i, ce qui entraîne $\det A = \det A^{(k)}$. Si on restreint les opérations effectuées à la sous-matrice principale d'ordre k de A, on obtient par le même argument que

$$\det \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,k}^{(k)} \end{vmatrix} = a_{1,1}^{(1)} \times a_{1,2}^{(1)} \times \cdots \times a_{k,k}^{(k)}.$$

Une autre façon est de montrer que la structure triangulaire inférieure des matrices E_i ($1 \leq i \leq k-1$) entraîne que $(A^{(k)})_k = (E_{k-1})_k (E_{k-2})_k \cdots (E_1)_k \Delta_k$, où $(\cdot)_k$ désigne la sous matrice principale d'ordre k (utiliser les matrices blocs).

Finalement $\det \Delta_k \neq 0$ équivaut à $a_{1,1}^{(1)} \times a_{1,2}^{(1)} \times \cdots \times a_{k,k}^{(k)} \neq 0$, soit $a_{i,i}^{(i)} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Le résultat est démontré par récurrence.

2. Décomposition de Cholesky

2.1. Rappel et théorème.

Définition 2. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique définie positive si

(1) $A^t = A$ (A symétrique)

(2) $x^t A x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (A positive)

(3) $x^t A x = 0$ si et seulement si $x = 0$ (A définie)

Exercice 3. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique-définie-positive alors $\det A > 0$ et A admet n valeurs propres réelles strictement positives. [chercher dans vos cours d'algèbre, exercices, livres...]

Proposition 4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors toutes ses sous-matrices principales sont symétriques définies positives.*

Démonstration. Notons Δ_k la sous-matrice principale de A d'ordre k, qui est clairement symétrique. Si $k = n$ c'est évident. Soient $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $z \in \mathbb{R}^k$ et démontrons les points (2) et (3) de la définition.

L'idée est de compléter le vecteur z en un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par

$$y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Clairement on a $y^t Ay = z^t \Delta_k z \geq 0$, ce qui entraîne Δ_k positive. De plus $y^t Ay = z^t \Delta_k z = 0$ équivaut à $y = 0$ (dans $\mathbb{R}^n$), soit $z = 0$ (dans $\mathbb{R}^k$). La matrice Δ_k est donc symétrique définie positive. □

Théorème 5 (Décomposition de Cholesky)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une unique matrice T triangulaire inférieure dont les termes de la diagonale sont positifs telle que $A = TT^t$. Une telle décomposition est appelée décomposition de Cholesky.*

Démonstration. D'après la proposition **??** (et l'exercice) nous savons que toutes les sous-matrices principales de A sont de déterminant non nul. La matrice A admet donc une décomposition LU, la diagonale de L n'étant composée que de 1. De plus $\det \Delta_k = \prod_{i=1}^k u_{i,i} > 0$ pour tout $k > 0$ ce qui entraîne $u_{i,i} > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Posons $D = \operatorname{diag}(\sqrt{u_{1,1}}, \dots, \sqrt{u_{n,n}})$ matrice diagonale dont les coefficients de la diagonale sont respectivement $\sqrt{u_{1,1}}, \dots, \sqrt{u_{n,n}}$. Alors $A = LDD^{-1}U = (LD)(D^{-1}U)$.

Montrons que $T = LD$ convient, ce qui revient à démontrer que $D^{-1}U = (LD)^t$. Comme A est symétrique l'égalité $A^t = A$ nous donne $U^t L^t = A$, soit $(U^t D^{-1} D^{-1})(DDL^t) = A$. D'après la définition de D, la matrice $U^t D^{-1} D^{-1}$ est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et il est évident que DDL^t est une matrice triangulaire supérieure. Ainsi l'unicité de la décomposition LU entraîne que $L = U^t D^{-1} D^{-1}$, d'où $T^t = (LD)^t = (U^t D^{-1})^t = D^{-1}U$ [depuis le début on utilise le fait que la transposée d'une matrice diagonale est elle-même].

Montrons l'unicité d'une telle décomposition. Soit $A = MM^t$ une autre décomposition de Cholesky. L'égalité $MM^t = TT^t$ nous donne $T^{-1}M = T^t(M^t)^{-1}$, avec $T^{-1}M$ triangulaire inférieure et $T^t(M^t)^{-1}$ triangulaire supérieure. Donc $T^{-1}M$ est une matrice diagonale, notée D'. Ajoutons que comme T^{-1} et M sont des matrices triangulaires inférieures dont les coefficients de la diagonale sont positifs, il en est de même pour D'. L'égalité $TT^t = A = MM^t = TD'(TD')^t = TD'D'T^t$ implique que $D'D' = I$. Du fait que les coefficients de D' soient positifs nous en déduisons que $D' = I$, soit $M = T$. □

2.2. **Algorithme et nombre d'opérations élémentaires.** La méthode pour trouver la décomposition de Cholesky est d'écrire $A = TT^t$ et d'identifier les coefficients de façon progressive. Commencer avant de lire la suite par faire un dessin pour $TT^t \dots$ puis écrire l'algorithme correspondant (voir plus loin le dit-algorithme).

Pour les opérations élémentaires il faut distinguer ici les additions-soustractions, les multiplications-divisions et les extractions de racines (bien plus compliquées).

les $\sqrt{\ }$: ligne 3, $n-2$ lignes 8 et ligne 11 ce qui fait n extractions de racine

les $\times\div$: ligne 3 : $n-1$, lignes 6 et 8 : $\sum_{k=2}^{n-1}\left[(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} k\right]$, ligne 11 : $n-1$. D'où un total

$$n - 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \Big[\sum_{k=2}^{n-1} k(n-k)\Big] + n - 1 = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{2n}{3} \approx \frac{n^3}{6}$$

les $+-$: on trouve

$$\frac{n^3 - n}{6} \approx \frac{n^3}{6}$$

Le temps de calcul des n extractions de racine est négligeable devant les $n^3/3$ opérations élémentaires. Finalement la décomposition de Cholesky nécessite de l'ordre de $n^3/3$ opérations élémentaires, ce qui est moins comparativement à la décomposition LU.

Algorithme 1 Décomposition de Cholesky

$t_{1,1} \leftarrow \sqrt{a_{1,1}}$
for $i = 2$ to n **do**
  $t_{i,1} \leftarrow \dfrac{a_{1,i}}{t_{1,1}}$
end for
for $k = 2$ to $n-1$ **do**
  $t_{k,k} \leftarrow (a_{k,k} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{k,i}^2)^{1/2}$
  for $i = k+1$ to n **do**
    $t_{i,k} \leftarrow \left(a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} t_{i,j} t_{j,k}\right)/t_{k,k}$
  end for
end for
$t_{n,n} \leftarrow \left(a_{n,n} - \sum_{i=1}^{n-1} t_{n,j}^2\right)^{1/2}$

Remarque 6. Si on sait que la matrice A est symétrique définie positive il donc plus intéressant de chercher sa décomposition de Cholesky plutôt que sa décomposition LU. Pour des raisons non développées dans ce cours, les matrices symétriques définies positives interviennent naturellement en analyse numérique car issues d'un produit scalaire.

2.3. **Un exemple.** Soit la matrice A

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 2 \\ -6 & 10 & -15 & -3 \\ 8 & -15 & 26 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 62 \end{pmatrix}$$

Faisons le dessin

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{2,1} & t_{3,1} & t_{4,1} \\ 0 & t_{2,2} & t_{3,2} & t_{4,2} \\ 0 & 0 & t_{3,3} & t_{4,3} \\ 0 & 0 & 0 & t_{4,4} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & 0 & 0 \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & 0 \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 2 \\ -6 & 10 & -15 & -3 \\ 8 & -15 & 26 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 62 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) $t_{1,1}^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t_{1,1} = 2$
(2) $2t_{2,1} = -6 \quad \Rightarrow \quad t_{2,1} = -3$
(3) $2t_{3,1} = 8 \quad \Rightarrow \quad t_{3,1} = 4$
(4) $2t_{4,1} = 2 \quad \Rightarrow \quad t_{4,1} = 1$
(5) $(-3)^2 + t_{2,2}^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad t_{2,2} = 1$
(6) $(-3) \times 4 + t_{3,2} = -15 \quad \Rightarrow \quad t_{3,2} = -3$
(7) $-3 + t_{4,2} = -3 \quad \Rightarrow \quad t_{4,2} = 0$
(8) $4^2 + (-3)^2 + t_{3,3}^2 = 26 \quad \Rightarrow \quad t_{3,3} = 1$
(9) $4 \times 1 + t_{4,3} = -1 \quad \Rightarrow \quad t_{4,3} = -5$
(10) $1^2 + 0^2 + (-5)^2 + t_{4,4}^2 = 62 \quad \Rightarrow \quad t_{4,4} = 6$