CALCUL DE PRIMITIVES, V0.1

Avertissement : ce document a été tapé trop rapidement et inclut donc un nombre conséquent d'erreurs en tout genre. L'auteur décline toute responsabilité dans l'usage de ce document.

Rappel. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute application $g : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que, $\forall x \in I\ g'(x) = f(x)$. Si g est une primitive de f alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $g + \lambda$ est une primitive de f. Si g et h sont 2 primitives de f alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $h = g + \mu$.

Une primite de f est notée $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Primitives de fonctions usuelles

Ce qui suit est un **rappel.**

$x^m,\ m \neq -1$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + \lambda$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + \lambda$
$\exp(x)$	$\exp(x) + \lambda$	$\cos(x)$	$\sin(x) + \lambda$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + \lambda$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + \lambda$
$1 + \mathrm{cotan}^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\mathrm{cotan}(x) + \lambda$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x) + \lambda$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x) + \lambda$	$1 - \mathrm{th}(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathrm{th}(x) + \lambda$
$1 - \coth^2(x) = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2(x)}$	$\coth(x) + \lambda$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (\lvert x\rvert < 1)$	$\mathrm{Arcsin}(x) + \lambda$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x) + \lambda$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{Argsh}(x) + \lambda = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \lambda$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (x > 1)$	$\mathrm{Argch}(x) + \lambda$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (x < -1)$	$-\mathrm{Argch}(x) + \lambda$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (\lvert x\rvert > 1)$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + \lambda$	$\dfrac{1}{1-x^2}\ (\lvert x\rvert < 1)$	$\mathrm{Argth}(x) + \lambda$
$\dfrac{1}{1-x^2}\ (\lvert x\rvert > 1)$	$\mathrm{Argcoth}(x) + \lambda$	$\dfrac{1}{1-x^2}\ (\lvert x\rvert \neq 1)$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x+1}{x-1}\right\rvert + \lambda$

2. Changement de variables dans une intégrale indéfinie

Rappel sur l'intégrale de Riemann. Si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, f continue, et $g : [\alpha,\beta] \mapsto g([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$, g dérivable sur $[\alpha,\beta]$ et g' continue alors

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si $g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrale indéfinie.

Primitive de f sur I intervalle réel, $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

Soit $g : J \mapsto I$, $g \in \mathcal{C}(J, I)$ telle que g réalise une bijection de J sur I. Ainsi $x = g(t)$ équivaut à $t = g^{-1}(x)$ et on a

$$F(g(t)) = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad (F \circ g \circ g^{-1})(x) = F(x).$$

Autrement dit le changement de variables $x = g(t)$ permet de calculer $F \circ g(t)$ et en composant $(F \circ g) \circ g^{-1}$ on obtient finalement $F(x)$.

Exemple 2.1. $F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $|x| \leq 1$. Posons $x = \sin(t)$. Or la fonction $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \mapsto [-1, 1]$ est définie continue strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$, elle réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$ et est continûment dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Dans ce cas

$$F(g(t)) = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \lambda.$$

Ajoutons que $x = \sin(t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, équivaut à $t = \operatorname{Arcsin}(x)$ et que $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) = 2x\sqrt{1-x^2}$. Donc

$$F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(x) + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \lambda.$$

2.1. Calcul des primitives de $\frac{1}{\alpha^2+x^2}, \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}, \frac{1}{\alpha^2-x^2}, \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$.

On suppose que $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$. Effectuons le changement de variable $x = \alpha t$, $\mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{d}t$. Alors

$$\int \frac{1}{\alpha^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha}{\alpha^2+\alpha^2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\operatorname{Arctan} t + \lambda$$

$$|x| < \alpha \qquad \int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2(1-t^2)}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} t + \lambda$$

$$|x| \neq \alpha \qquad \int \frac{1}{\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \lambda$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} = \int \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2(1+t^2)}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + \lambda$$

$$|x| > \alpha \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + \lambda$$

D'où

$$\int \frac{1}{\alpha^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\operatorname{Arctan}\frac{x}{\alpha} + \lambda, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Arcsin}\frac{x}{\alpha} + \lambda$$

$$\int \frac{1}{\alpha^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right| + \lambda, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+\alpha^2}\right) + \lambda$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2-\alpha^2}\right| + \lambda.$$

2.2. Calcul des primitives de $\frac{1}{ax^2+bx+c}, \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Tout d'abord on écrit

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big) = a\Big((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big).$$

Clairement tout dépendra du signe de la quantité $4ac - b^2$ (et de celui de a pour la racine).

$\frac{1}{ax^2+bx+c}$

1er cas : $4ac - b^2 > 0$. Le trinôme n'a pas de racine ; soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{4ac-b^2}{4a^2} = \alpha^2$. Alors en posant $x + \frac{b}{2a} = t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ on a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{a\alpha}\operatorname{Arctan}\frac{t}{\alpha} + \lambda = \frac{1}{a\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}\operatorname{Arctan}\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}} + \lambda$$

$$= \frac{2\varepsilon}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{Arctan}\frac{(2ax+b)\varepsilon}{\sqrt{4ac-b^2}} + \lambda \quad \text{où } \varepsilon = \operatorname{sign}(a)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{Arctan}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + \lambda.$$

2ème cas : $4ac - b^2 = 0$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-b/2a\}$

$$\int \frac{dx}{a(x+\frac{b}{2a})^2} = \frac{-1}{a(x+\frac{b}{2a})} + \lambda = \frac{-a}{2ax+b} + \lambda.$$

3ème cas : $b^2 - 4ac > 0$. Soient x_1 et x_2 les deux racines disctinctes de notre trinôme. Pour $x \neq x_1$ et $x \neq x_2$, si $\alpha^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ et $x + \frac{b}{2a} = t$ ($\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$) alors

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\left((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\alpha^2} = \frac{1}{2a\alpha}\ln\left|\frac{t-\alpha}{\alpha+t}\right| + \lambda = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\varepsilon a}}{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\varepsilon a}}\right| + \lambda$$

$$= \frac{1}{2a\alpha}\ln\left|\frac{2ax+b-\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}\right| + \lambda.$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}\right| + \lambda$$

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+bx+c}}$$

Il y a quatre cas, $4ac - b^2 > 0$ (qui entraîne $a > 0$), $b^2 - 4ac > 0$ et $a > 0$, $b^2 - 4ac > 0$ et $a < 0$, et enfin $b^2 - 4ac = 0$ (qui entraîne $a > 0$).

1er cas : $4ac - b^2 > 0$ et $a > 0$. Posons $\alpha^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$, $\alpha = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$, $t = x + \frac{b}{2a}$:

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\alpha^2}\right) + \lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\right| + \lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a}\right) + \lambda$$

2ème cas : $b^2 - 4ac > 0$ et $a > 0$. Le trinôme possède deux racines distinctes $x_1 < x_2$ et bien sûr le trinôme est strictement positif dans $\mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$:

$$J(x) = \int \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\alpha^2}\right| + \lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{a}}\right| + \lambda.$$

3ème cas : $b^2 - 4ac > 0$ et $a < 0$. Le trinôme possède deux racines distinctes, $x_1 < x_2$ et est strictement positif pour $x \in]x_1, x_2[$:

$$J(x) = \int \frac{1}{\sqrt{-a}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2-4ac}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t^2+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{Arcsin} \frac{t}{\alpha} + \lambda$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{Arcsin} \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \lambda.$$

4ème cas : $b^2 - 4ac = 0$ et $a > 0$. Clairement

$$J(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} \ln\left(\varepsilon(x + \frac{b}{2a})\right) + \lambda \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x + \frac{b}{2a}) > 0.$$

2.3. **Primitives des fractions rationnelles en x.**

$$\int \frac{a(x)}{b(x)} \mathrm{d}x$$

où $a \in \mathbb{R}[X]^*$ et $b \in \mathbb{R}[X]^*$. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples (ce thème sera abordé (après !) en algèbre) :

- pgcd$(a, b) = 1$
- si $\deg a \geq \deg b$ alors il y a une partie entière (non nulle), $q(x)$, $q \in \mathbb{R}[X]$ et on a $a = bq + r$, avec $r = 0$ ou $\deg r < \deg b$. Le polynôme q étant facilement intégrable, il reste à calculer la primitive de la fraction rationnelle $\frac{r(x)}{b(x)}$.
- si $\deg a < \deg b$ on calcule la primitive de $\frac{a(x)}{b(x)}$.

Dans tous les cas, on décompose la fraction rationnelle (r/b ou a/b) en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$. Il faut donc calculer les primitives d'élements simples de 1ère espèce et de 2ème espèce :

élts simples de 1ère espèce

$$\frac{\lambda}{(x-\alpha)^n} \quad \lambda \neq 0, \quad n \geq 1,$$

qui s'intègre en

$$\begin{cases} \lambda \ln|x-\alpha| + \beta & \text{si } n = 1, \\ \dfrac{\lambda}{1-n} \dfrac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + \beta & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

élts simples de 2ème espèce

$$\frac{\lambda x + \mu}{\left((x-m)^2 + n^2\right)^p} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad p \in \mathbb{N}^*.$$

On écrit tout d'abord

$$\frac{\lambda x + \mu}{\left((x-m)^2 + n^2\right)^p} = \frac{\lambda}{2} \frac{2(x-m)}{\left((x-m)^2 + n^2\right)^p} + \frac{\mu + \lambda m}{\left((x-m)^2 + n^2\right)^p}.$$

Le premier terme s'intègre selon que $p = 1$ ou $p \neq 1$:

$$\frac{\lambda}{2} \int \frac{2(x-m)}{\left((x-m)^2 + n^2\right)^p} \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} \ln\left((x-m)^2 + n^2\right) + \beta & \text{si } p = 1, \\ \dfrac{\lambda}{2(1-p)} \dfrac{1}{\left((x-m)^2 + n^2\right)^{p-1}} + \beta & \text{si } p \geq 2. \end{cases}$$

Reste le calcul de

$$I(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left((x-m)^2 + n^2\right)^p},$$

qui peut se faire par un changement de variables algébriques ou trigonométriques. Voyons les deux solutions.

Changement de variables algébriques. En posant $x - m = nt$, $\mathrm{d}x = n\,\mathrm{d}t$ le calcul se ramène à celui de

$$I(g(t)) = \int \frac{n\,\mathrm{d}t}{(n^2t^2+n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p-1}} \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^p}.$$

Posons $A_p = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^p}$. Le calcul de A_p se fait par récurrence avec

$$A_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} t + \lambda$$

et une intégration par partie

$$A_p = \frac{t}{(t^2+1)^p} + \int \frac{t \times p \times 2t}{(1+t^2)^{p+1}} = \frac{t}{(t^2+1)^p} + 2p \int \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^{p+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+1)^p} + 2p(A_p - A_{p+1}),$$

$$\text{qui donne la relation} \quad 2pA_{p+1} = (2p-1)A_p + \frac{t}{(t^2+1)^p}.$$

Changement de variables trigonométriques. On pose $x - m = n\tan\theta = h(\theta)$, $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\mathrm{d}x = n(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Alors

$$I(h(\theta)) = \int \frac{n(1+\tan^2\theta)}{(n^2\tan^2\theta+n^2)^p}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{n^{2p-1}} \int \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\tan^2\theta)^{p-1}} = \frac{1}{n^{2p-1}} \int \cos^{2p-2}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Si $p = 1$, la primitive est déjà connue ou se retrouve avec l'expression ci-dessus. Si

— $p = 2$ — on a

$$\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \lambda$$

et comme

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{x-m}{n}\right)}{1+\left(\frac{x-m}{n}\right)^2} = \frac{2n(x-m)}{(x-m)^2+n^2}$$

finalement

$$I(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{x-m}{n} + \frac{n}{2}\frac{x-m}{(x-m)^2+n^2} + \lambda.$$

— $p = 3$ — et briévement :

$$\int \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int (\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\frac{\sin 4\theta}{4} + 2\sin 2\theta + 3\theta + \lambda$$

soit

$$I(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{n(x-m)(n^2-(x-m)^2)}{((x-m)^2+n^2)^2} + \frac{2n(x-m)}{(x-m)^2+n^2} + 3\operatorname{Arctan}\frac{x-m}{n} + \lambda\right).$$

D'une façon générale on pose $B_p = \displaystyle\int \cos^{2p}\theta\,\mathrm{d}\theta$ et par intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} B_p &= \int \cos^{2p-1}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \cos^{2p-1}\theta\sin\theta + \int \sin\theta \times (2p-1)\cos^{2p-2}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \cos^{2p-1}\theta\sin\theta + (2p-1)(B_{p-1} - B_p). \end{aligned}$$

soit

$$2pB_p = \cos^{2p-1}\theta\sin\theta + (2p-1)B_{p-1}.$$

Exemple 2.2. Calculons

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{3x+4}{(x^2+x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3} + \frac{5}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{4}\frac{1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{5}{2}J(x), \end{aligned}$$

où $J(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^3}$. En posant $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t = g(t)$, $\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t$, on obtient

$$J(g(t)) = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3 \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \frac{32\sqrt{3}}{27}A_3.$$

Pour A_3 on écrit que $2A_2 = A_1 + \frac{t}{t^2+1}$ soit

$$A_2 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1},$$

puis que $4A_3 = \frac{3}{2}A_1 + \frac{3}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{t}{(t^2+1)^2}$, ce qui donne finalement

$$A_3 = \frac{3}{8}A_1 + \frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer t par son expression en x :

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{32\sqrt{3}}{27}A_3 = \frac{32\sqrt{3}}{27}\left(\frac{3}{8}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3\sqrt{3}}{16(x^2+x+1)^2} + \lambda\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9}\left(4\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2\sqrt{3}(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} + \lambda\right). \end{aligned}$$

Ainsi finalement

$$I(x) = \frac{40x+11}{12(x^2+x+1)} + \frac{5}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{10\sqrt{3}}{9}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \lambda.$$

3. Fonctions composées de fonctions trigonométriques

3.1. Calcul de $\int \cos(ax+b)\cos(cx+d)\,\mathrm{d}x$, $\int \cos(ax+b)\sin(cx+d)\,\mathrm{d}x$, $\int \sin(ax+b)\sin(cx+d)\,\mathrm{d}x$.

On transforme en somme, ce procédé s'applique aussi au cas de 3 facteurs.

Exemple 3.1. Calculons $I = \int \sin x \sin 2x \sin 3x\,\mathrm{d}x$. Successivement

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$$

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}(-\cos 3x \sin 3x + \cos x \sin 3x) = \frac{1}{4}(-\sin 6x + \sin 4x + \sin 2x),$$

d'où $I = \frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x$.

3.2. Fonction polynôme en $\sin x$ et $\cos x$.

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{\substack{0\le h\le p\\ 0\le k\le q}} a_{hk}\sin^h x\cos^k x.$$

Le calcul de la primitive de $\sin^h x\cos^k x$ dépend de la parité des entiers h et k.
Cas h ou k impair. Si $h = 2\alpha+1$, la primitive à calculer s'écrit

$$A = \int \sin^{2\alpha+1} x\cos^k x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)^\alpha \cos^k x \sin x\,\mathrm{d}x$$

Par changement de variable $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$ on obtient

$$A = -\int (1-u^2)^\alpha u^k\,\mathrm{d}u,$$

qui se calcule aisément.

Si $k = 2\beta + 1$ alors

$$A = \int \sin^h x \cos^{2\beta+1} x\,\mathrm{d}x = \int \sin^h x(1-\sin^2 x)^\beta \cos x\,\mathrm{d}x = \int u^h(1-u^2)^\beta\,\mathrm{d}u,$$

qui se calcule aisément.

Cas h et k sont impairs. L'intégrale s'écrit

$$\begin{aligned}\int \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1}\mathrm{d}x &= \int (\sin^2 x)^\alpha(\cos^2 x)^\beta \sin x\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= \int \Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^\alpha\Big(\frac{1+\cos 2x}{2}\Big)^\beta \frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\int \Big(\frac{1-u}{2}\Big)^\alpha\Big(\frac{1+u}{2}\Big)^\beta\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

où $u = \cos 2x$ et $\mathrm{d}u = -2\sin 2x\,\mathrm{d}x$. En développant le calcul se poursuit. La méthode précédente s'applique aussi, c'est une question de goût.

Cas h et k sont pairs. On écrit $k = 2\alpha$ et $h = 2\beta$. Si h et k sont assez petits on remplace $\sin^2 x$ par $\frac{1-\cos 2x}{2}$ et $\cos^2 x$ par $\frac{1+\cos 2x}{2}$ et on linéarise. Par exemple calculons $I(x) = \int \sin^4 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$. Sachant que

$$(\sin x\cos x)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}\times\frac{1-\cos 4x}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

on a (rappelant que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$)

$$\sin^4 x\cos^2 x = \frac{1}{16}(1-\cos 2x-\cos 4x+\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)) = \frac{1}{16}(1-\frac{1}{2}\cos 2x-\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 6x),$$

d'où

$$I(x) = \frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{192}\sin 6x+\lambda.$$

Si h et k sont grands la situation se complique. Posons $I_{\alpha,\beta} = \int \sin^{2\alpha} x\cos^{2\beta} x\,\mathrm{d}x$ et établissons une formule de récurrence :

$$I_{\alpha,\beta} = \int \sin^{2\alpha-1} x(\sin x\cos^{2\beta} x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{2\beta+1} x\sin^{2\alpha-1} x}{2\beta+1}+\frac{2\alpha-1}{2\beta+1}\int \cos^{2\beta+2} x\,\sin^{2\alpha-2} x\,\mathrm{d}x$$

$$I_{\alpha,\beta} = -\frac{\cos^{2\beta+1} x\sin^{2\alpha-1} x}{2\beta+1}+\frac{2\alpha-1}{2\beta+1}I_{\alpha-1,\beta+1}.$$

Par itération le calcul de $I_{\alpha,\beta}$ se ramène à celui de $I_{0,\beta+\alpha} = \int \cos^{2(\beta+\alpha)} x\,\mathrm{d}x$.

3.3. **Fonction rationnelle en** $\sin x$ **et** $\cos x$. Soit

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{P(\cos x,\sin x)}{Q(\cos x,\sin x)}.$$

3.3.1. *Méthode brutale.* On fait le changement de variable

$$t = g^{-1}(x) = \tan\frac{x}{2} \quad x \in] -\pi + k\pi, \pi + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Les calculs donnent

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Ainsi

$$I(g(t)) = \int \frac{P\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)}{Q\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

qui est une fraction rationnelle en t. Ce changement de variable aboutit dans tous les cas. Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ vérifie certaines propriétés le calcul peut être simplifié (un peu). C'est l'objet des règles de Bioche qui suivent dans 3.3.2–3.3.4. La notion de "plus simple" tient en fait dans le degré des fractions rationnelles obtenu *in fine* et "un peu moins" de calcul.

3.3.2. *Si la différentielle $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariante lorsqu'on change x en $-x$,* alors on peut poser $u = \cos x$, u nouvelle variable. On obtient une primitive d'une fraction rationnelle en u à calculer. En effet P et Q se décomposent en

$$\begin{aligned} P(\cos x, \sin x) &= P_1(\cos x) + \sin x P_2(\cos x) \\ Q(\cos x, \sin x) &= Q_1(\cos x) + \sin x Q_2(\cos x). \end{aligned}$$

$P_1(\cos x)$ est obtenu en considérant les termes ne contenant pas $\sin x$, ou le contenant à une puissance pair, i.e. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ donne des termes en $\cos x$ uniquement. $\sin x P_2(\cos x)$ est obtenu en considérant les termes contenant $\sin x$ à une puissance impaire et grace à l'égalite $\sin^{2\alpha+1} x = \sin x(1-\cos^2 x)^\alpha$. De même pour Q_1 et Q_2. Ainsi par l'hypothèse $f(-x)(-\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{P_1(\cos x) + \sin x P_2(\cos x)}{Q_1(\cos x) + \sin x Q_2(\cos x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{P_1(\cos x) - \sin x P_2(\cos x)}{Q_1(\cos x) - \sin x Q_2(\cos x)}(-\mathrm{d}x) \\ &= \frac{-P_1(\cos x) + \sin x P_2(\cos x)}{Q_1(\cos x) - \sin x Q_2(\cos x)}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On utilise ensuite le fait que si $\dfrac{A+B}{C+D} = \dfrac{A-B}{C-D}$ alors $AD = BC$ et

$$\frac{A+B}{C+D} = \begin{cases} \frac{A}{C} & \text{si } C \neq 0, \\ \frac{B}{D} & \text{si } D \neq 0. \end{cases}$$

Donc si $Q_1 \neq 0$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin x \frac{P_2(\cos x)}{Q_1(\cos x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{P_2(u)}{Q_1(u)}\,\mathrm{d}u,$$

où $u = \cos x$ et $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

Si $Q_1 = 0$ et $Q_2 \neq 0$ alors

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{-P_1(\cos x)}{-\sin x Q_2(\cos x)}\,\mathrm{d}x = \int \sin x \frac{P_1(\cos x)}{(1-\cos^2 x)Q_2(\cos x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{P_1(u)}{(1-u^2)Q_2(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Dans les deux cas le changement de variables aboutit.

3.3.3. *Si la différentielle $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariante lorsqu'on change x en $\pi - x$,* alors on peut poser $v = \sin x$, v nouvelle variable. On obtient une primitive d'une fraction rationnelle en v à calculer. Par une technique similaire à ce qui précède on peut écrire P et Q sous la forme

$$P(\cos x, \sin x) = P_3(\sin x) + \cos x P_4(\sin x), \quad Q(\cos x, \sin x) = Q_3(\sin x) + \cos x Q_4(\sin x).$$

Par l'hypothèse on obtient

$$\begin{aligned} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{P_3(\sin x) + \cos x P_4(\sin x)}{Q_3(\sin x) + \cos x Q_4(\sin x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-P_3(\sin x) + \cos x P_4(\sin x)}{Q_3(\sin x) - \cos x Q_4(\sin x)}(+\,\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

et finalement

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos x P_4(\sin x)}{Q_3(\sin x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{si } Q_3 \neq 0.$$

Il suffit de poser $v = \sin x$, $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x P_4(\sin x)}{Q_3(\sin x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{P_4(v)}{Q_3(v)}\,\mathrm{d}v.$$

Si $Q_3 = 0$ alors $Q_4 \neq 0$ et le même changement de variable aboutit à une fraction rationnelle en v.

3.3.4. *Si la différentielle $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariante par les deux changements de variables précédents,* on peut poser $w = \cos 2x$, w nouvelle variable et le calcul se ramène à une fraction rationnelle en w. En effet d'après 3.3.2 on a

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x P_2(\cos x)}{Q_1(\cos x)}\,\mathrm{d}x$$

et on peut transformer P_2 et Q_1 de telle sorte que

$$P_2(\cos x) = P_{21}(\cos^2 x) + \cos x P_{22}(\cos^2 x) \quad \text{et} \quad Q_1(\cos x) = Q_{11}(\cos^2 x) + \cos x Q_{12}(\cos^2 x).$$

Le fait que le changement de variable de x en $\pi - x$ laisse invariant $f(x)\,\mathrm{d}x$ implique

$$\begin{aligned} f(x)\,\mathrm{d}x =& \frac{\sin x P_{21}(\cos^2 x) + \sin x \cos x P_{22}(\cos^2 x)}{Q_{11}(\cos^2 x) + \cos x Q_{12}(\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-\sin x P_{21}(\cos^2 x) + \sin x \cos x P_{22}(\cos^2 x)}{Q_{11}(\cos^2 x) - \cos x Q_{12}(\cos^2 x)}(dx) \\ &= \frac{\sin x \cos x P_{22}(\cos^2 x)}{Q_{11}(\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \quad \text{si } Q_{11} \neq 0 \end{aligned}$$

et le changement de variable $w = \cos 2x$, $\cos^2 x = (1+w)/2$, $\mathrm{d}w = -2\sin 2x\,\mathrm{d}x$ donne

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \frac{P_{22}\left(\frac{1+w}{2}\right)}{Q_{11}\left(\frac{1+w}{2}\right)}\,\mathrm{d}w.$$

Si $Q_{11} = 0$ alors $Q_{12} \neq 0$ et le calcul aboutit avec le même changement de variables.

3.3.5. *Si la différentielle $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariante lorsqu'on change x en $\pi + x$,* alors on peut poser $t = \tan x$, t nouvelle variable. On obtient une primitive d'une fraction rationnelle en t à calculer. On écrit

$$\begin{aligned} P(\cos x, \sin x) &= P_1(\cos x) + \sin x P_2(\cos x) \\ &= \big(P_{11}(\cos^2 x) + \cos x P_{12}(\cos^2 x)\big) + \sin x\big(P_{21}(\cos^2 x) + \cos x P_{22}(\cos^2 x)\big) \\ Q(\cos x, \sin x) &= Q_1(\cos x) + \sin x Q_2(\cos x) \\ &= \big(Q_{11}(\cos^2 x) + \cos x Q_{12}(\cos^2 x)\big) + \sin x\big(Q_{21}(\cos^2 x) + \cos x Q_{22}(\cos^2 x)\big). \end{aligned}$$

Sachant que $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariante lorsqu'on change x en $\pi + x$ alors

$$\begin{aligned}
f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\big(P_{11}(\cos^2 x) + \cos x P_{12}(\cos^2 x)\big) + \sin x\big(P_{21}(\cos^2 x) + \cos x P_{22}(\cos^2 x)\big)}{\big(Q_{11}(\cos^2 x) + \cos x Q_{12}(\cos^2 x)\big) + \sin x\big(Q_{21}(\cos^2 x) + \cos x Q_{22}(\cos^2 x)\big)}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\big(P_{11}(\cos^2 x) - \cos x P_{12}(\cos^2 x)\big) - \sin x\big(P_{21}(\cos^2 x) - \cos x P_{22}(\cos^2 x)\big)}{\big(Q_{11}(\cos^2 x) - \cos x Q_{12}(\cos^2 x)\big) - \sin x\big(Q_{21}(\cos^2 x) - \cos x Q_{22}(\cos^2 x)\big)}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{P_{11}(\cos^2 x) + \sin x \cos x P_{22}(\cos^2 x)}{Q_{11}(\cos^2 x) + \sin x \cos x Q_{22}(\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

En posant $t = \tan x$, $\cos^2 x = 1/(1+t^2)$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = t/(1+t^2)$, $\mathrm{d}t = (1+t^2)\,\mathrm{d}x$, $dx = \mathrm{d}t/(1+t^2)$, si $Q_{11}(\cos^2 x) + \sin x \cos x Q_{22}(\cos^2 x) \neq 0$ alors

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{P_{11}\big(\frac{1}{1+t^2}\big) + \frac{t}{1+t^2}P_{22}\big(\frac{1}{1+t^2}\big)}{(1+t^2)Q_{11}\big(\frac{1}{1+t^2}\big) + tQ_{22}\big(\frac{1}{1+t^2}\big)}\,\mathrm{d}t.$$

Sinon c'est la quantité $-\cos x Q_{12}(\cos^2 x) - \sin x Q_{21}(\cos^2 x)$ qui est non nulle et le même changement de variables aboutit à une fraction rationnelle en t.

3.3.6. *Deux exemples.*

Exemple 3.2. Soit à calculer

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \qquad x \neq k\pi.$$

La quantité $\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ est invariante quand on change x en $-x$. Posons donc $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$. On obtient

$$F(x) = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{(1-u^2)} = -\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+u}{1-u}\Big| + \lambda = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + \lambda.$$

De plus

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \frac{\cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)} \quad \text{d'où} \quad F(x) = \ln\big|\tan(x/2)\big| + \lambda.$$

Comme exercice tester le changement de variable dit "brutal" pour obtenir le même résultat.

Exemple 3.3. Soit à calculer

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x - \cos 3x}.$$

Ici $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariante quand on change x en $\pi - x$. Posons $v = \sin x$, $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$. Quelques relations trigonométriques nous donnent : $\cos x - 3\cos 3x = 2\sin 2x \sin x$. Donc

$$F(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x \sin x} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}$$

et

$$\begin{aligned}
G(v) &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2(1-v^2)} = \frac{1}{4}\int \Big(\frac{1}{v^2} + \frac{1/2}{1-v} + \frac{1/2}{1+v}\Big)\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{v} - \frac{1}{2}\ln|1-v| + \frac{1}{2}\ln|1+v|\Big) + \lambda = -\frac{1}{4v} + \frac{1}{8}\ln\Big|\frac{1+v}{1-v}\Big| + \lambda.
\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$F(x) = -\frac{1}{4\sin x} + \frac{1}{8}\ln\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big| + \lambda.$$

4. Fonctions composées de fonctions hyperboliques

Les versions hyperboliques équivalentes aux sections 3.1 et 3.2 pour les fonctions trigonométriques se traîtent à l'identique.

4.1. **Fractions rationnelles en** $\operatorname{ch} x$ **et** $\operatorname{sh} x$**.** Soit

$$f(x) = \frac{P(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)}{Q(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)}.$$

Posons $\tau = \operatorname{th}(x/2)$, $\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\Big(1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}\tau}{1-\tau^2}$. Les formules des fonctions hyperboliques nous donnent

$$\operatorname{ch} x = \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{2\tau}{1-\tau^2}.$$

La primitive $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ devient donc

$$\int \frac{P\Big(\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \frac{2\tau}{1-\tau^2}\Big)}{Q\Big(\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \frac{2\tau}{1-\tau^2}\Big)} \frac{2\,\mathrm{d}\tau}{1-\tau^2}.$$

D'autres changements de variables sont possibles, du type “règles de Bioche”. Pour cela il faut considérer la version trigonométrique associée, i.e. on remplace ch par cos et sh par sin et on regarde les propriétés de la forme $\frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$:

invariant par	chgt en trigonométrique	chgt en hyperbolique
$x \to -x$	$u = \cos x$	$u = \operatorname{ch} x$
$x \to \pi - x$	$v = \sin x$	$v = \operatorname{sh} x$
les deux précédents	$w = \cos 2x$	$w = \operatorname{ch} 2x$
$x \to \pi + x$	$t = \tan x$	$t = \operatorname{th} x$

Exemple 4.1. Reprendre les deux cas trigonométriques et calculer

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} 3x - \operatorname{ch} x}.$$

4.2. **Remarques sur certaines primitives.** Soit P_n un polynome de degré n et cherchons Q_n de degré n tel que

$$\int \exp(\alpha x) P_n(x)\,\mathrm{d}x = \exp(\alpha x) Q_n(x).$$

Si P_n et Q_n s'écrivent $P_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $Q_n = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ alors

$$\Big(\exp(\alpha x)\Big)' = \exp(\alpha x)\Big(\alpha b_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \big(\alpha b_k + (k+1) b_{k+1}\big) x^k\Big).$$

Par identification, $\alpha b_n = a_n$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ $\alpha b_k + (k+1) b_{k+1} = a_k$, ce qui permet de trouver les coefficients b_k du polynôme Q_n.

Pour calculer les primitives de $C(x) = \exp(\alpha x) \cos \beta x \cdot P_n(x)$ on associe $S(x) = \exp(\alpha x) \sin \beta x \cdot P_n(x)$ et on se ramène au cas précédents à l'aide des complexes :

$$C(x) + iS(x) = \int \exp\big((\alpha + i\beta)x\big) P_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 4.2. Si $C = \int x^2 \exp(x) \cos x\,\mathrm{d}x$ et $S = \int x^2 \exp(x) \sin x\,\mathrm{d}x$ alors

$$C = \exp(x)\Big(\frac{x^2-1}{2}\cos x + \big(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\big)\sin x\Big), \quad S = \exp(x)\Big(\big(-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\big)\cos x + \big(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\big)\sin x\Big).$$

5. Calcul de primitives de certaines fonctions irrationnelles

$f(x, y)$ est une fonction rationnelle en x et y. La quantité y est l'une des deux quantités suivantes,

(1) la racine n-ème d'une fonction homographique en x, $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

(2) la racine carrée d'un trinôme du 2nd degré en x : $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

5.1. **Cas** $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$**.** avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$. Calculons

$$I(x) = \int f\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,\mathrm{d}x$$

La quantité $y^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ est égale à a/c si et seulement si $bc = ad$. Donc

$$x(a - cy^n) = y^n d - b \quad \Leftrightarrow x = \frac{y^n d - b}{a - cy^n} = g(y)$$

et

$$\mathrm{d}x = \frac{n^{n-1}d(a - cy^n) + ncy^{n-1}(y^n d - b)}{(a - cy^n)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{n(ad - bc)y^{n-1}}{(a - cy^n)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Le calcul de $I(x)$ se ramène à celui de $I(g(y))$

$$I(g(y)) = \int f\Big(\frac{y^n d - b}{a - cy^n}, y\Big)\frac{n(ad - bc)y^{n-1}}{(a - cy^n)^2}\,\mathrm{d}y$$

qui est une fraction rationnelle en y.

Exemple 5.1. Calculons $I(x) = \int \dfrac{1}{2x-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$. Posons

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \mathcal{D}_f = [-1, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}.$$

Posons $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $y^2(1 - x) = 1 + x$ équivaut à $x(1 + y^2) = y^2 - 1$, soit

$$x = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = g(y) \quad \text{(fonction paire)}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = g'(y) = \frac{4y}{(y^2+1)^2}.$$

La fonction $g'(y)$ est strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, 1[$. Ajoutons que $g(y) = 1/2$ équivaut à $y^2 = 3$. Ainsi

$$I(g(y)) = \int \frac{y^2+1}{y^2-3} \times y\frac{4y}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y = 4\int \frac{y^2}{(y^2-3)(y^2+1)}\,\mathrm{d}y,$$

$y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\sqrt{3}\}$. La théorie des fractions rationnelles nous dit que

$$\frac{y^2}{(y^2-3)(y^2+1)} = \frac{a}{y - \sqrt{3}} + \frac{b}{y + \sqrt{3}} + \frac{cy + d}{y^2 + 1},$$

et on trouve $b = -a$, $c = 0 =$, $a = \sqrt{3}/8$ et $d = 1/4$. Ainsi

$$\begin{aligned} I(g(y)) &= \int \frac{\sqrt{3}/2}{y - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}/2}{y + \sqrt{3}} + \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|y - \sqrt{3}\right| - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|y + \sqrt{3}\right| + \operatorname{Arctan} y + \lambda \end{aligned}$$

et finalement

$$I(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{3}}\right| + \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \lambda.$$

5.2. **Cas** $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$**.** avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^*\mathbb{R}^2$. Posons

$$I(x) = \int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x.$$

5.2.1. *Changements de variable algébrique.* On propose deux changements de variables algèbriques, le premier général, le second dans le cas particulier où $\Delta > 0$.

(1) Selon la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$, il y a deux racines disctinctes avec choix de x dans $]-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty[$, une seule (i.e. on supprime la racine) ou aucune racine ($x \in \mathbb{R}$). Ici $]-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty[$ veut dire que selon la fonction f, x_1 est inclus ou non inclus, de même pour x_2 : il suffit de comparer $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ définie pour $ax^2+bx+c \geq 0$ et $\int 1/\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ définie pour $ax^2+bx+c > 0$.

On pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x+t)$ et on peut prendre t comme nouvelle variable :

$$ax^2+bx+c = a(x^2+2tx+t^2), \quad x(2at-b) = c - at^2, \quad x = \frac{c-at^2}{2at-b} \quad t \neq \frac{b}{2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-2at(2at-b)-(c-at^22a}{(2at-b)^2} = \frac{-2a^2t^2+2abt-2ac}{(2at-b)^2} = \frac{-2a(at^2-bt+c)}{(2at-b)^2}.$$

Attention $x = \frac{c-at^2}{2at-b}$ n'est pas équivalent à $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x+t)$, il y a une question d'intervalle pour t à préciser !

→Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0$. Selon le tableau de variations ci-dessous,

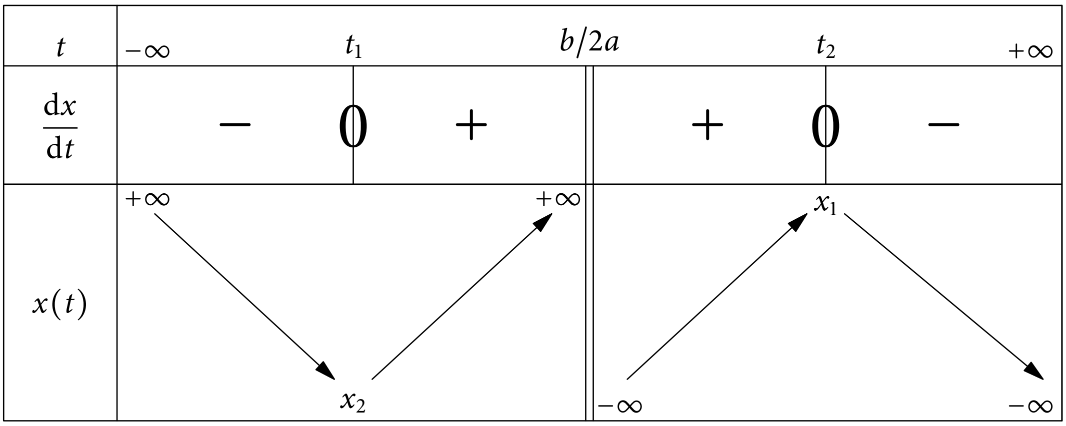
t	$-\infty$	$b/2a$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$-$	||	$-$
$x(t)$	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$

et on se ramène à x en fonction de t, strictement monotone dans $]b/2a, +\infty[$.

→Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, alors posons

$$t_2 = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad t_1 = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Il faut faire très attention et bien déterminer quel intervalle en t réalise une bijection sur $]-\infty, x_1)$ et lequel réalise une bijection sur $(x_2, +\infty[$. Nous avons alors le tableau de variations suivant



Posons $x(t_1) = x_2$ et $x(t_2) = x_1$. On peut prendre l'intervalle $(-x_2, +\infty[\cup]-\infty, x_1)$ et sachant que $x + t = \frac{at^2-bt+c}{2at-b}$, on obtient que

$$I(g(t)) = \int f\Big(\frac{c-at^2}{2at-b}, \sqrt{a}\Big(\frac{at^2-bt+c}{2at-b}\Big)\Big)(-2a)\frac{(at^2-bt+c)}{(2at-b)^2}\,\mathrm{d}t,$$

qui est une fraction rationnelle en t, avec $t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x}{\sqrt{a}}$.

(2) On suppose ici $\Delta > 0$ et selon le signe de a, $a > 0$ et $x \in]-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty[$ ou $a < 0$ et $x \in (x_1, x_2)$.
$\to$Si $a > 0$ posons $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x-x_1)t$ (ou bien $\sqrt{a}(x-x_2)t$), avec t la nouvelle variable. Pour mener correctement l'étude de ce changement de variable il faut bien remarquer que si $x > x_2$ alors $t > 0$ et si $x < x_1$ alors $t < 0$. En élevant au carré $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x-x_1)t$ on obtient successsivement

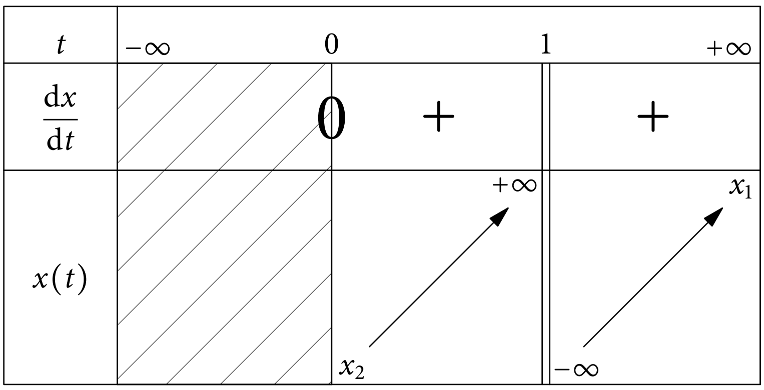
$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x-x_1)t^2, \quad x - x_2 = (x-x_1)t^2$$

$$x(1-t^2) = -x_1t^2 + x_2, \quad x = \frac{x_1t^2-x_2}{t^2-1}, \ t \neq \pm 1.$$

Ainsi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2tx_1(t^2-1) - 2t(x_1t^2-x_2)}{(t^2-1)^2} = \frac{2t(x_2-x_1)}{(t^2-1)^2}.$$

Dans le cas où $x \in (x_2, +\infty[$ on a $t \in (0,1[$ et le tableau de variation donne



Ainsi si $x \in (x_2, +\infty[$ alors $t \in (0,1[$, la bijection est bien réalisée et comme

$$x - x_1 = \frac{x_1t^2 - x_2 - x_1t^2 + x_1}{t^2-1} = \frac{x_1-x_2}{t^2-1}$$

on obtient

$$I(g(t)) = \int f\Big(\frac{x_1t^2 - x_2}{t^2-1}, \frac{\sqrt{a}(x_1-x_2)t}{t^2-1}\Big)\frac{2t(x_2-x_1)}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{\sqrt{a}(x-x_1)} = \frac{\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}}{\sqrt{a}(x-x_1)}.$$

Dans le cas où $x \in]-\infty, x_1)$ on a par la même méthode $t \in]-\infty, -1)$.
Dans tous les cas le changement de variable aboutit à une fraction rationnelle en t.
→Si $a < 0$ alors $x \in (x_1, x_2)$ et

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(x-x_1)t, \quad t > 0 \quad (\text{ou } \sqrt{-a}(x-x_2)t, \quad < 0)$$

Successivement les calculs donnent

$$ax^2+bx+c = -a(x-x_1)^2t^2, \quad x - x_2 = -(x-x_1)t^2, \quad x = \frac{x_1t^2+x_2}{1+t^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2x_1t(1+t^2)-2t(x_1t^2+x_2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2t(x_1-x_2)}{(1+t^2)^2},$$

d'où le tableau de variation

t	0		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	0	$-$	
$x(t)$	x_2	$\searrow$	x_1

Finalement

$$I(g(t)) = \int f\Big(\frac{x_1t^2+x_2}{1+t^2}, \frac{\sqrt{-a}(x_2-x_1)}{1+t^2}t\Big)\frac{2t(x_1-x_2)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{\sqrt{-a}(x-x_1)} = \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}, \quad x - x_1 = \frac{x_2-x_1}{1+t^2}.$$

$I(g(t))$ est bien une fraction rationnelle en t.

5.2.2. *Changements de variable trigonométrique.* Le point de départ est toujours

$$ax^2+bx+c = a\Big(\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big).$$

1er cas : $a > 0$ et on doit distinguer deux sous cas, $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.

→$\Delta < 0$. On constate que $\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ est la somme de deux termes positifs donc de deux carrés. On peut poser

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\ \tan\theta$$

Comme le trinôme ne possède pas de racine réelle, x décrit $\mathbb{R}$, d'où θ décrit $]-\pi/2,\pi/2[$ et

$$ax^2+bx+c = a\Big(\frac{4ac-b^2}{4a^2}(1+\tan^2\theta)\Big) = \frac{4ac-b^2}{4a}\Big(\frac{1}{\cos^2\theta}\Big)$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4ac-b^2}{a}}\frac{1}{\cos\theta}.$$

On obtient alors

$$I(g(\theta)) = \int f\Big(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\tan\theta, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4ac-b^2}{a}}\frac{1}{\cos\theta}\Big)\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

qui a le bon goût d'être une fraction rationnelle en $\sin\theta$ et $\cos\theta$!

autre changement de variable possible

$$x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\ \operatorname{sh} u$$

avec u décrivant $]-\infty,\infty[$. Brièvement

$$ax^2+bx+c = a\Big(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big)(\operatorname{sh}^2 u+1) = a\Big(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big)\operatorname{ch}^2 u,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4ac-b^2}{a}}\operatorname{ch} u,\qquad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u.$$

d'où

$$I(g(u)) = \int f\Big(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{sh} u, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4ac-b^2}{a}}\operatorname{ch} u\Big)\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$$

qui a le bon goût d'être une fraction rationnelle en $\operatorname{sh} u$ et $\operatorname{ch} u$!

$\to\Delta>0$. Dans ce cas x varie dans $]-\infty,x_1(\cup(x_2,+\infty[$ et

$$ax^2+bx+c = a\Big(\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2-\frac{b^2-4ac2}{4a^2}\Big)$$

est la différence de deux termes positifs donc de deux carrés. On pose

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{ch} u$$

avec u dans $\mathbb{R}^+$, $\varepsilon=+1$ si x est strictement croissant de x_2 à $+\infty$ et $\varepsilon=-1$ si x est strictement décroissant de x_1 à $-\infty$. Sachant que $\operatorname{ch}^2 u = \operatorname{sh}^2 u+1$ on obtient

$$ax^2+bx+c = a\Big(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\operatorname{sh}^2 u\Big),\qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a}}\operatorname{sh} u$$

$$\mathrm{d}x = \varepsilon\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u.$$

D'où

$$I(g(u)) = \int f\Big(\frac{-b}{2a}+\frac{\varepsilon\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{ch} u, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a}}\operatorname{sh} u\Big)\varepsilon\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{sh} u\,\mathrm{d}u$$

qui est une fraction rationnelle en $\operatorname{sh} u$ et $\operatorname{ch} u$!

autre changement de variable possible

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\frac{1}{\sin\theta}\qquad \text{avec } \theta\in]-\pi/2,\pi/2[\setminus\{0\}.$$

2ème Cas : $a < 0$ et nécessairement $\Delta > 0$, ce qui donne deux racines distinctes $x_1 < x_2$ pour notre trinôme. Ajoutons que nécessairement $x \in (x_1, x_2)$. On écrit que

$$ax^2 + bx + c = (-a)\Big(\frac{b^2-4ac}{4a^2} - \big(x + \frac{b}{2a}\big)^2\Big)$$

est la différence de deux termes positifs donc de deux carrés et on pose

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\sin\theta, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

x étant strictement croissant de x_1 à x_2. Par la suite

$$ax^2 + bx + c = -a\Big(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\cos^2\theta\Big)\sqrt{ax^2+bx+c}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{-a}}\cos\theta$$

$$\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

et

$$I(g(\theta)) = \int f\Big(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}\sin\theta, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{-a}}\cos\theta\Big)\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

qui est bien une fraction rationnelle en $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Pour le calcul d'intégrale, on utilise le changement de variable trigonométrique ou algébrique, en changeant les bornes et il est donc inutile de « repasser » en x. Par contre pour la recherche de primitive il est nécessaire de « repasser » en x *in fine*. Dans tous les cas il faut bien préciser les bijections, les intervalles,…

5.2.3. *Exemple.* Calculons

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-3)(x-2)}} \qquad x \in]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]3, +\infty[.$$

Suivons ce qui précède et posons $\sqrt{(x-3)(x-2)} = x + t$, $x(2t+5) = 6 - t^2$,

$$t \neq -5/2 \quad x = \frac{6-t^2}{2t+5}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-2t(2t+5) - 2(6-t^2)}{(2t+5)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-2(t^2+5t+6)}{(2t+5)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Le tableau de variations de x en fonction de t

t	$-\infty$		-3		$-5/2$		$-\sqrt{6}$		-2		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$		$+$	0	$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x(t)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

Ainsi $x + t = \frac{t^2+5t+6}{2t+5}$ et

$$I(g(t)) = \int \frac{\frac{-2(t^2+5t+6)}{(2t+5)^2}}{\frac{6-t^2}{2t+t} \times \frac{t^2+5t+6}{2t+5}}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-6} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{t-\sqrt{6}}{t+\sqrt{6}}\right| + \lambda,$$

ce qui donne

$$I(x) = \frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{(x-3)(x-2)} - x - \sqrt{6}}{\sqrt{(x-3)(x-2)} - x + \sqrt{6}}\right| + \lambda.$$

5.3. **Exemple.** Calculons

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Le trinôme $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$ n'admet pas de racines réelles, la primitive est donc définie sur $\mathbb{R}$. Posons $x + 2 = \operatorname{sh} u$, $u \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$ et $\sqrt{x^2+4x+5} = \operatorname{ch} u$, d'où

$$\begin{aligned} I(g(u)) &= \int \frac{(\operatorname{sh} u - 2)^2 \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch} u}\,\mathrm{d}u = \int (\operatorname{sh}^2 u - 4\operatorname{sh} u + 4)\,\mathrm{d}u = \int \Big(\frac{1}{2}\operatorname{ch} 2u - 4\operatorname{sh} u + \frac{7}{2}\Big)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2u - 4\operatorname{ch} u + \frac{7}{2}u + \lambda. \end{aligned}$$

Sachant que $\operatorname{sh} 2u = 2\operatorname{sh} u \times \operatorname{ch} u = 2(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}$, $\operatorname{sh} u = x + 2$ et $u = \operatorname{Argsh}(x+2)$ on obtient finalement

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+5} - 4\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{7}{2}\operatorname{Argsh}(x+2) + \lambda \\ &= \Big(\frac{x}{2} - 3\Big)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{7}{2}\operatorname{Argsh}(x+2) + \lambda. \end{aligned}$$

Une autre méthode est de poser $x(2t-4) = 5 - t^2$, ce qui demande à calculer

$$-\frac{1}{4}\int \frac{(5-t^2)^3}{(t-2)^3}\,\mathrm{d}t \ldots$$