Université de Rouen
M1 MFA
Année 2007-2008

Équations aux dérivées partielles et analyse numérique
Contrôle continu du 26 novembre 2007, durée 2h

L'usage de tout document est interdit.
L'usage de tout téléphone portable, calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. Soit $k \in]0,1/2[$ et $\Omega = B(0,1/2)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1/2 dans $\mathbb{R}^2$. On note $x = (x_1, x_2)$ le point dans $\mathbb{R}^2$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $n \geq 1$ on définit la fonction u_n de Ω dans $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = \begin{cases} (-\ln(|x|))^k & \text{si } \frac{1}{n} \leq \|x\| < \frac{1}{2}, \\ \ln(n)^k & \text{si } \|x\| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

On rappelle qu'une fonction $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dans $H^1(\Omega)$ et que les dérivées partielles au sens usuel coïncident –presque partout– avec les dérivées partielles au sens faible.

On rappelle que si f est une fonction radiale et borélienne définie de Ω dans $\mathbb{R}^+$ alors

$$\int_\Omega f(x)dx = s_2 \int_0^{1/2} rf(r)dr,$$

où s_2 est la surface de la sphère unité en dimension 2.

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, (u_n) appartient à $H^1(\Omega)$.

(b) Montrer que la quantité $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ est bornée indépendamment de n.

(c) Calculer en fonction de s_2, n et k la quantité

$$\int_\Omega \Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\Big)^2 dx.$$

(d) Montrer que la suite (u_n) est bornée dans H^1.

(e) Calculer $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)}$.

(f) Existe-t-il une constante $C > 0$ telle que pour tout v dans $H^1(\Omega)$ on ait

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad ?$$

Exercice 2. Soit $I =]0,1[$ et f dans $L^2(I)$. On cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} -u'' + \int_I u(x)dx = f & \text{dans } I, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Pour cela on définit pour tout v dans $H^1(I)$ la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\bigg(\int_I (v'(x))^2 dx + \Big(\int_I v(x)dx \Big)^2 \bigg) - \int_I f(x)v(x)dx.$$

On rappelle l'inégalité de Poincaré–Wirtinger : il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u - \int_I u(x)dx\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

(a) Montrer que le problème $\min\{J(v)\,;\, v \in H^1(\Omega)\}$ admet une unique solution u et qu'elle est l'unique solution du problème variationnel

$$(1) \qquad \int_I u'(x)v'(x)dx + \Big(\int_I u(x)dx\Big)\Big(\int_I v(x)dx\Big) = \int_I f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

[Indication pour la coercivité de la forme bilinéaire : on pourra utiliser l'inégalité de Poincaré–Wirtinger]

(b) Montrer que si u est solution du problème variationnel (1) alors

$$\int_I u(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

(c) On suppose $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et f continue sur $[0,1]$. Montrer que u est solution du problème variationnel (1) si et seulement si u est solution de l'équation différentielle

$$-u'' + \int_I u(x)dx = f \text{ dans } I, \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$

Exercice 3. Soient b, c et f des fonctions dans $L^\infty(]0,1[)$. On rappelle le principe du maximum. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ vérifiant

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) \geq 0, & \forall x \in]0,1[, \\ u(0) \geq 0, \quad u(1) \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Si $c(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$ alors $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

(a) On suppose que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = \alpha \geq 0, \quad u(1) = \beta \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que $|u(x)| \leq w(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ où $w \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est solution de

$$\begin{cases} -w''(x) + b(x)w'(x) + c(x)w(x) = \|f\|_\infty, & \forall x \in]0,1[, \\ w(0) = \alpha \geq 0, \quad w(1) = \beta \geq 0. \end{cases}$$

(b) On suppose que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + 2u(x) = f(x), & \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = \alpha \geq 0, \quad u(1) = \beta \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que $\|u\|_\infty \leq \max(\alpha, \beta, \frac{\|f\|_\infty}{2})$.