Université de Rouen
DEUG MIAS 2ème année
Algèbre
Année 2000-2001

Devoir à préparer pour le 11 janvier 2001

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère la forme bilinéaire symétrique f sur E de forme quadratique associée q telle que pour tout $X = (x_1, x_2, x_3)$ de E,

$$q(X) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

(1) Déterminer le rang et la signature de q.

(2) Trouver explicitement une base orthogonale de E relativement à f.

(3) Quel est le noyau $N(q)$ de q ?

(4) Soit $F = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F relativement à f ($F^\perp = \{X \in E \mid f(X,Y) = 0 \quad \forall Y \in F\}$).

(5) Montrer que l'on a $F^{\perp\perp} = F + N(q)$.

(6) Préciser l'ensemble des vecteurs isotropes relativement à q.

Problème : Déterminant de Gram et Applications

Partie I

Soit $(E, <\cdot,\cdot>)$ un espace préhilbertien réel, c'est–à–dire E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et $<\cdot,\cdot>$ est un produit scalaire sur E. Si $u_1, \ldots, u_n$ sont n vecteurs de E, on note $V = V(u_1, \ldots, u_n)$ le sous espace vectoriel qu'ils engendrent, $g = g(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice $n \times n$ de terme général

$$g_{ij}(u_1, \ldots, u_n) = < u_i, u_j >$$

et $G = G(u_1, \ldots, u_n)$ le déterminant de cette matrice (G est appelé le déterminant de Gram de $u_1, \ldots, u_n$).

A) On désigne par F un sous espace vectoriel de dimension finie m de E contenant V, par $\mathcal{B}$ une base orthonormée de F et par $A = \big(a_{ij}\big)_{i,j}$ la matrice $m \times n$ dont la j-ième colonne donne les composantes de u_j dans la base $\mathcal{B}$.

(1) Montrer que l'on a $g = {}^tAA$.

(2) Montrer que si m et n sont égaux, alors $G = (\det A)^2$.

(3) Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par $q(X) = {}^tXgX$.

-a- Montrer que q est positive.

-b- Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) q est définie

(ii) g est inversible

(iii) V est de dimension n.

B) Soient V un sous espace vectoriel de dimension $p \geq 1$ de E, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_p)$, $x \in E$ et

$$d(x, V) = \inf \Big\{ \|x - v\|\,;\ v \in V \Big\}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ (i.e. $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$ pour tout $x \in E$).

(1) Montrer que $d(x, V) = \|x - y\|$ où y est la projection orthogonale de x sur V.

(2) Montrer que

$$\big[d(x, V)\big]^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_p, x)}{G(e_1, \ldots, e_p)}$$

C) Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ un système libre dans E. Pour $p \in \{1, \ldots, n\}$, soit $g_p = g(u_1, \ldots, u_p)$ et $G_p = G(u_1, \ldots, u_p)$. Pour $p \in \{2, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$, soit $\Delta_{j,p}$ le cofacteur de $< u_j, u_p >$ dans g_p. On notera $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$ l'orthonormalisée de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par le procédé de Gram–Schmidt.

(1) Pour $p \in \{2, \ldots, n\}$ posons :

$$v_p = \sum_{j=1}^{p} \frac{\Delta_{j,p}}{G_{p-1}} u_j$$

Montrer que : $< v_p, u_i >= 0$ pour $i \in \{1, \ldots, p-1\}$

$$< v_p, u_p >= \frac{G_p}{G_{p-1}}$$

(2) Montrer que $v_p = u_p - \sum_{j=1}^{p-1} < u_p, \mathcal{E}_j > \mathcal{E}_j$

(3) En déduire que $\|v_p\|^2 = \frac{G_p}{G_{p-1}}$

(4) En déduire que $\mathcal{E}_p = \frac{1}{\sqrt{G_{p-1}G_p}} \sum_{j=1}^{p} \Delta_{j,p} u_j$

Partie II

A) Montrer que

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}$$

B) Soit E le $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ des fonctions continues définies sur $[0,1]$. On munit E du produit scalaire :

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $e_n(x) = x^n$ $(\forall x \in [0,1])$, $n \geq 0$ entier.

(1) Calculer $G(1, e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $G(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. [Indication : utiliser A)]

(2) Soit $V = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. Montrer que :

$$\big[d(1, V)\big]^2 = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(3) Soit l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \qquad f(a) = \int_0^1 (1 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)^2 \mathrm{d}t.$$

Montrer que f admet un minimum. Calculer ce minimum.