Université de Rouen – Madrillet
DEUG MIAS 2ème année
Algèbre
Année 2000-2001

Contrôle continu
30 novembre 2000
Durée : 1h50

Aucun document n'est autorisé, l'usage d'une calculatrice n'est pas autorisé.

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f et trouver une base de $\mathbb{R}^4$ où f trigonalise sous la forme

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Décomposer $\mathbb{R}^3$ en somme de sous espaces stables par f et déterminer le polynôme minimal de f.

(b) L'endomorphisme f est-il trigonalisable ? Diagonalisable ?

(c) Calculer M^{-1}.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3). On considère dans E^* la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) duale de la base canonique. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f_1, f_2 et f_3 les formes linéaires définies par $f_1 = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$, $f_2 = e_2^*$ et $f_3 = e_1^* - e_2^* + e_3^*$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que f_1, f_2, f_3 soient linéairement indépendantes.

(b) Dans le cas où f_1, f_2, f_3 sont linéairement indépendantes, de quelle base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ de E, (f_1, f_2, f_3) est-elle la base duale (dans E^*) ?

Exercice 4.

(a) Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n (où $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$). Montrer que si f est un endomorphisme nilpotent d'indice p (entier) avec $2 \leq p \leq n$ (i.e. $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$) alors λ valeur propre de f si et seulement si $\lambda = 0$. Que peut-on alors dire de $P_{c,f}(X)$ (le polynôme caractéristique de f) et de $P_{m,f}(X)$ (le polynôme minimal de f) lorsque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos ?

(b) Question facultative : On suppose $E = \mathbb{R}^4$. Quel peut être a priori $P_{c,f}(X)$ quand f est nilpotente d'indice p avec $p = 4$, $p = 3$ et $p = 2$?

(c) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On définit $f : E \longrightarrow E$

$$P \longrightarrow P' + P''$$

-i- Montrer que f est un endomorphisme de E nilpotent d'indice 4.

-ii- Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$.

-iii- Déterminer une base $\mathcal{B}' = (P_3, P_2, P_1, P_0)$ telle que la matrice de f dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$