ÉQUIVALENCES DES DÉFINITIONS

1. Sommes de Riemann

Définition 1.1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle subdivision pointée, s, de $[a, b]$ tout couple $\big((x_i)_{0\le i\le n}), (y_i)_{1\le i\le n}\big)$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad x_{i-1} \le y_i \le x_i.$$

On définit le pas de la subdivision pointée, s, comme le pas de la subdivision $(x_i)_{0\le i\le n}$, i.e. $\mathbf{pas}(s) = \mathbf{pas}\big((x_i)_{0\le i\le n}\big) = \max_{0\le i\le n-1}(x_{i+1} - x_i)$.

Définition 1.2. Si $s = \big((x_i)_{0\le i\le n}), (y_i)_{1\le i\le n}\big)$ est une subdivision pointée de l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, on appelle somme de Riemann de f pour cette subdivision la valeur

$$S(f, s) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(y_i).$$

Théorème 1.3. *Une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si s est une subdivision pointée de $[a, b]$*

$$\mathbf{pas}(s) < \alpha \Longrightarrow \big|S(f, s) - l\big| < \varepsilon. \tag{1}$$

De plus $l = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. Supposons que f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ et montrons la convergence des sommes de Riemann. Posons $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit, d'après la définition du cours, (φ, ψ) deux fonctions en escalier telles que

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \le \psi(x), \qquad \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Remarquons que

$$\Big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\Big| < \varepsilon, \tag{2}$$

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) - \psi(x) \le f(x) \le \varphi(x) + \psi(x). \tag{3}$$

Soit s' une subdivision adaptée à $\varphi + \psi$ et notons $s' = (x'_i)_{0\le i\le p}$.

Soit $s = \big((x_i)_{0\le i\le n}), (y_i)_{1\le i\le n}\big)$ une subdivision pointée de $[a, b]$. Le choix du pas de la subdivision pointée dépendra de s' et donc de ε. L'idée est d'associer à $S(f, s)$ une fonction étagée, g_s, dont l'intégrale vaut $S(f, s)$ et de comparer g_s, $\varphi - \psi$ et $\varphi + \psi$ sur l'intervalle $[a, b]$ et d'en déduire un encadrement de $S(f, s)$.

Soit g_s la fonction en escalier sur $[a, b]$ definie par

$$g_s(x) = \begin{cases} f(y_i) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i[\quad (i \le n), \\ f(b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Clairement $S(f, s) = \int_a^b g_s(t)\,\mathrm{d}t$. Il faut maintenant comparer finement g_s et $\varphi + \psi$. En effet comme on peut le constater sur le graphique ci-dessous la propriété $g_s \le \varphi + \psi$ est fausse en général ! Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ deux cas peuvent se présenter :

–cas favorable– il existe $j \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $[x_i, x_{i+1}] \in]x'_j, x'_{j+1}[$. La propriété (3) et le fait que $\varphi + \psi$ soit constante sur $]x'_j, x'_{j+1}[$ entraînent que $g_s \leq \varphi + \psi$ sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$;

–cas défavorable– il existe $j \in \{0, \dots, p\}$ tel que $x'_j \in [x_i, x_{i+1}]$ et dans ce cas on ne peut pas comparer g_s et $\varphi + \psi$ mais clairement $g_s(x) \leq M$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ (c'est la majoration dite brutale).

$\varphi + \psi$

$g_{s|]x_i, x_{i+1}[}$

Cas favorable
$\gamma_s \leq \varphi + \psi$ sur $[x_i, x_{i+1}]$

Cas défavorable

$\gamma_s \leq \varphi + \psi$ sur $[x_i, x_{i+1}]$

a x'_1 x_i y_i x_{i+1} x'_2 a x'_1 x_i x'_2 y_i x_{i+1}

Comme les points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(x'_j)_{0 \leq j \leq p}$ sont ordonnés il y a au plus p cas défavorables (ce nombre ne dépendant pas de g_s mais de $\varphi + \psi$ i.e. de ε). On obtient donc les deux inégalités

$$\sum_{\text{cas favorable}} (x_{i+1} - x_i) f(y_i) \leq \sum_{\text{cas favorable}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t) + \psi(t) \, \mathrm{d}t \tag{4}$$

$$\sum_{\text{cas défavorable}} (x_{i+1} - x_i) f(y_i) \leq \sum_{\text{cas défavorable}} M(x_{i+1} - x_i) \leq pM \, \mathbf{pas}(s) \tag{5}$$

Si $M_\varepsilon = \sup_{x \in [a,b]} (|\varphi(x)| + |\psi(x)|)$ alors

$$\int_a^b \varphi(t) + \psi(t) \, \mathrm{d}t - pM_\varepsilon \, \mathbf{pas}(s) \leq \sum_{\text{cas favorable}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t) + \psi(t) \, \mathrm{d}t \leq \int_a^b \varphi(t) + \psi(t) \, \mathrm{d}t + pM_\varepsilon \, \mathbf{pas}(s). \tag{6}$$

Les inégalités (4)–(6) entraînent que

$$S(f, s) = \int_a^b g_s(t) \, \mathrm{d}t \leq \int_a^b (\varphi(t) + \psi(t) \, \mathrm{d}t + p \, \mathbf{pas}(s)(M_\varepsilon + M).$$

De la même façon on démontre que

$$\int_a^b \varphi(t) - \psi(t) \, \mathrm{d}t - p \, \mathbf{pas}(s)(M_\varepsilon + M) \leq \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t = S(f, s).$$

Les deux inégalités précédentes impliquent que

$$\left|S(f,s) - \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t + p\,\mathbf{pas}(s)(M_\varepsilon + M).$$

Définissons $\alpha > 0$ tel que $\alpha p(M_\varepsilon + M) < \varepsilon$ (la constante α ne dépend que de p, M_ε et M mais ne dépend pas de g_s). Si la subdivision pointée s est telle que $\mathbf{pas}(s) < \alpha$ alors

$$\left|S(f,s) - \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| < 2\varepsilon$$

et avec (2)

$$\left|S(f,s) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| < 3\varepsilon.$$

Ainsi si f est Riemann intégrable alors les sommes de Riemann convergent vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ quand le pas de la subdivision tend vers 0.

Réciproque. Supposons que les sommes de Riemann convergent et montrons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ, ψ fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\psi \le f \le \varphi \quad \text{sur } [a,b], \quad \text{et} \quad \int_a^b (\varphi - \psi)(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon, \tag{7}$$

ce qui équivaut d'après un lemme du cours à f Riemann intégrable sur $[a,b]$.

La quantité $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ est nécessairement fini, car sinon $|S(f,s)|$ serait aussi grand que l'on veut pour une subdivision de pas arbitrairement petit ce qui contredirait la convergence des sommes de Riemann vers un réel fini.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tels que les conditions (1) sur les sommes de Riemann soit vérifiées. Soit $s = (x_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de pas strictement inférieur à α. Soit $\beta > 0$ (qui sera précisé ultérieurement). Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ soit y_i tel que

$$x_{i-1} \le y_i \le x_i, \qquad \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \beta \le f(y_i) \le \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Les y_i existent (par définition de la borne supérieure) et dépendent de β. Soit la subdivision pointée $t = ((x_i)_{0\le i\le n}, (y_i)_{1\le i\le n})$ qui vérifie $\mathbf{pas}(t) < \alpha$ et donc

$$\left|S(f,t) - l\right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Définissons la fonction φ en escalier sur $[a,b]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y\in[x_{i-1},x_i]} f(y) & \text{si } x_{i-1} \le x < x_i \quad (1 \le i \le n), \\ f(b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $f \le \varphi$ sur $[a,b]$ et que

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \beta(b-a) \le S(f,t) \le \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\left|S(f,t) - \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \beta(b-a).$$

L'inégalité triangulaire et (8) nous donnent

$$\left|l - \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon + \beta(b-a). \tag{9}$$

Pour la minoration, recommençons ! Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ soit y_i' tel que

$$x_{i-1} \le y_i' \le x_i, \qquad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \le f(y_i') \le \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \beta.$$

Les y'_i existent et dépendent de β. De la même façon on définit la subdivision pointée $t' = ((x_i)_{0\le i\le n}, (y'_i)_{1\le i\le n})$ qui vérifie $\mathbf{pas}(t) < \alpha$ et donc

$$\left|S(f,t') - l\right| < \varepsilon.$$

Définissons la fonction ψ en escalier sur $[a,b]$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y\in[x_{i-1},x_i]} f(y) & \text{si } x_{i-1} \le x < x_i \quad (1 \le i \le n), \\ f(b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $\psi \le f$ sur $[a,b]$ et que

$$\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \le S(f,t) \le \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t + \beta(b-a),$$

ce qui donne en utilisant (8)

$$\left| l - \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon + \beta(b-a). \tag{10}$$

Pour conclure utilisons les inégalités (9) et (10) et l'inégalité triangulaire : on obtient

$$\left| \int_a^b \varphi(t) - \psi(t)\,\mathrm{d}t \right| < 2\varepsilon + 2\beta(b-a).$$

Il suffit donc de choisir $\beta > 0$ tel que $\beta(b-a) < \varepsilon$ pour conclure que nous avons construit deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, φ et ψ, telles que

$$\psi \le f \le \varphi \quad \text{sur } [a,b] \text{ et } \quad \left| \int_a^b \varphi(t) - \psi(t)\,\mathrm{d}t \right| < 4\varepsilon.$$

À une bonne rédaction près, la fonction f est Riemann intégrable sur $[a,b]$. □

1.1. **Applications.**

1.1.1. *Calcul d'une intégrale.* Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, calculons l'intégrale

$$J_\alpha = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2\right)\mathrm{d}t.$$

L'étude de la fonction $t \mapsto \left(1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2\right)$ et la condition $\alpha \ne \pm 1$ permet de conclure que la fonction $t \mapsto \ln\left(1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2\right)$ est continue sur $[0,\pi]$, donc Riemann intégrable.

D'après le théorème 1.3, si s_n désigne la subdivision pointée

$$x_i = \frac{i\pi}{n} \quad (0 \le i \le n), \qquad y_i = \frac{i\pi}{n} \quad (1 \le i \le n),$$

alors $S(f,s_n)$ tend vers J_α quand n tend vers l'infini ($\mathbf{pas}(s_n) = \pi/n \to 0$ quand $n \to +\infty$). Si $\omega = \exp(i\pi/n)$, ω désigne une racine $2n$-ème de l'unité, alors les propriétés du logarithme et un peu de calcul donnent

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{\pi}{n}\ln\left(1 - 2\alpha\cos(k\pi/n) + \alpha^2\right) &= \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 - 2\alpha\cos(k\pi/n) + \alpha^2\right)\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^n (\alpha - \omega^k)(\alpha - \omega^{-k})\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\ln\left((\alpha^{2n} - 1)\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right),\end{aligned}$$

sachant que pour obtenir la dernière ligne, les égalités $x^{2n} - 1 = \prod_{i=0}^{2n-1}(x - \omega^k)$ et $\omega^{-k} = \omega^{2n-k}$ donnent

$$x^{2n} - 1 = \prod_{i=0}^{n-1}(x - \omega^k) \times \prod_{i=1}^{n}(x - \omega^{-k}).$$

Ainsi par simple passage à la limite quand n tend vers l'infini on obtient que $J_\alpha = 0$ si $|\alpha| < 1$ et $J_\alpha = 2\pi\ln|\alpha|$ si $|\alpha| > 1$.

1.1.2. *Étude de suite.* Soit $p \in \mathbb{N} \setminus 0$ et définissons le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}.$$

Les sommes de Riemann permettent de donner la limite de la suite (u_n) très facilement. L'idée est de transformer la somme en une somme de Riemann, i.e. trouver la fonction f et la subsidivision pointée s_n telles que $u_n = S(f, s_n)$. Il faut donc un peu de pratique, de l'intuition et les idées claires ! Très souvent la subdivision s_n est une subdivision équidistante et $y_i = x_i$ ou $y_i = x_{i-1}$. Dans notre cas, si n est fixé,

$$\sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{np} \frac{p}{1+\frac{kp}{np}} = \sum_{k=1}^{np} (x_k - x_{k-1}) f(x_k) = S(f, s_n),$$

où

$$f(x) = \frac{p}{1+px}, \quad x_k = \frac{k}{np}\ (1 \leq k \leq np), \quad y_k = x_k\ (1 \leq k \leq n).$$

Comme la fonction f est continue sur $[0,1]$, donc intégrable au sens de Riemann, on obtient que u_n tend vers $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln\big((p+1)/p\big)$.

Exercice 1.

(a) Trouver la limite de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n^3}}$ quand $n \to +\infty$.

(b) A l'aide d'un D.L. de $\ln(1+x)$, x dans un voisinage de 0, calculer la limite de

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{n^3}}\right) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

[à défaut d'un D.L. l'encadrement $x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x$ suffira]

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big) g\Big(\frac{i+1}{n}\Big) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication : remarquer tout d'abord que la somme ci-dessus n'est pas une somme de Riemann ! Ensuite utiliser l'uniforme continuité pour se ramener à une somme de Riemann.

2. Sommes de Darboux

Soient f une fonction de $[a,b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$ et s une subdvision de $[a,b]$. On note $s = \big(x_i\big)_{0\leq i\leq n}$.

Définition 2.1. On appelle sommes de Darboux inférieure et supérieure les quantités

$$d(s,f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf\{f(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}]\},$$

$$D(s,f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup\{f(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Remarque 2.2. Clairement $d(s,f) \leq D(s,f)$.

Théorème 2.3. *Pour toutes subdivision s et t de l'intervalle $[a,b]$ on a*

$$d(s,f) \leq D(t,f). \tag{11}$$

En particulier si on définit les quantités

$$d(f) = \sup\{d(s,f), s \text{ subdivision de } [a,b]\},$$
$$D(f) = \inf\{D(s,f), s \text{ subdivision de } [a,b]\}$$

Alors $d(f) \leq D(f)$.

Proposition 2.4. *Si* s *et* t *sont deux subdivisions telles que* $s \prec t$ *alors* $d(s,f) \geq d(t,f)$ *et* $D(s,f) \leq D(t,f)$.

Preuve de la proposition. Posons $t = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ et $s = (y_i)_{0\leq i\leq p}$. Comme $s \prec t$ on sait que $\{x_0,\dots,x_n\} \subset \{y_0,\dots,y_p\}$ et comme les suites sont strictement ordonnées soient $p_0 = 0 < p_1 < \dots < p_{n-1} < p_n = p$ tels que $y_{p_i} = x_i$ pour $i \in \{0,\dots,n\}$. Clairement

$$\begin{aligned}(x_{i+1}-x_i)\sup_{[x_i,x_{i+1}]}(f(x)) &= \sum_{j=0}^{p_{i+1}-p_i-1}(y_{p_i+j+1}-y_{p_i+j})\sup_{[x_i,x_{i+1}]}(f(x))\\ &\geq \sum_{j=0}^{p_{i+1}-p_i-1}(y_{p_i+j+1}-y_{p_i+j})\sup_{[y_{p_i+j},y_{p_i+j+1}]}(f(x)),\end{aligned}$$

d'où, par sommation sur i, $D(t,f) \geq D(s,f)$.

De la même façon, les propriétés de la borne inférieure et le même découpage nous donnent $d(t,f) \leq d(s,f)$. □

Preuve du théorème 2.3. Il suffit, en utilisant la proposition précédente, de remarquer que $d(s,f) \leq d(s\wedge t,f) \leq D(s\wedge t,f) \leq D(t,f)$. □

On peut aussi caractériser les fonctions Riemann intégrables à l'aide des sommes de Darboux.

Théorème 2.5. *Une fonction* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *est Riemann intégrable si et seulement si* $d(f) = D(f)$. *Dans ce cas*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = d(f) = D(f).$$

Démonstration. Supposons f Riemann intégrable sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$ et soient φ, ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\psi \leq f \leq \varphi \quad \text{sur } [a,b] \text{ et } \quad \int_a^b \varphi(t)-\psi(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Soit s une subdvision adaptée à φ et ψ, $s = (x_i)_{0\leq i\leq n}$. La difficulté technique est que la propriété $f \leq \varphi$ sur $[a,b]$ n'entraîne pas nécessairement $(x_{i+1}-x_i)\sup\{f(x)\,;\,x \in [x_i,x_{i+1}]\} \leq (x_{i+1}-x_i)\varphi_{|]x_i,x_{i+1}[}$ (car $\sup\{f(x)\,;\,x \in [x_i,x_{i+1}]\}$ peut être différent de $\sup\{f(x)\,;\,x \in]x_i,x_{i+1}[\}$ Ceci nous contraint à faire du découpage !

Posons $M_\varepsilon = \sup_{[a,b]}|\varphi|$ et $M = \sup_{[a,b]}|f|$. Pour N assez grand ($1/N <$ **pas**$(s)/2$), posons $y_0 = x_0 = a$, $y_1 = x_1 - 1/N$, $y_2 = x_1 + 1/N$, …, $y_{2n-1} = x_{n-1} - 1/N$, $y_{2n} = x_{n-1} + 1/N$, $y_{2n+1} = x_n = b$ (formule générale $y_{2i+1} = x_i - 1/N$ et $y_{2i+2} = x_i + 1/N$ pour $1 \leq i \leq n-1$), ce qui nous donne une nouvelle subdivision t. Qaund N devient très grand, y_{2i} et y_{2i+1} encadrent x_i et ainsi

$$(y_{2i+1}-y_{2i})\sup\{f(x)\,;\,x\in[y_{2i},y_{2i+1}]\} \leq (y_{2i+1}-y_{2i})\varphi_{|]y_{2i},y_{2i+1}[} = (y_{2i+1}-y_{2i})\varphi_{|]x_i,x_{i+1}[},\tag{12}$$

$$(y_{2+2}-y_{2i+1})\sup\{f(x)\,;\,x\in[y_{2i+1},y_{2i+2}]\} \leq \frac{2M}{N},\tag{13}$$

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{2n}(y_{i+1}-y_i)\varphi_{|]y_i,y_{i+1}[} = \sum_{i=0}^{n}(y_{2i+1}-y_{2i})\varphi_{|]y_{2i},y_{2i+1}[} + \sum_{i=0}^{n-1}(y_{2+2}-y_{2i+1})\varphi_{|]y_{2i+1},y_{2i+2}[},\tag{14}$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}(y_{2+2}-y_{2i+1})\varphi_{|]y_{2i+1},y_{2i+2}[}\right| \leq \frac{2nM_\varepsilon}{N}.\tag{15}$$

Ainsi (12)–(15) nous donnent

$$\begin{aligned}
D(t,f) &= \sum_{i=0}^{2n}(y_{i+1}-y_i)\sup\{f(x)\,;\,x\in[y_i,y_{i+1}]\}\\
&= \sum_{i=0}^{n}(y_{2i+1}-y_{2i})\sup\{f(x)\,;\,x\in[y_{2i},y_{2i+1}]\}+\sum_{i=0}^{n-1}(y_{2+2}-y_{2i+1})\sup\{f(x)\,;\,x\in[y_{2i+1},y_{2i+2}]\}\\
&\le \sum_{i=0}^{n}(y_{2i+1}-y_{2i})\varphi_{|]y_{2i},y_{2i+1}[}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2M}{N}\\
&\le \sum_{i=0}^{2n}(y_{i+1}-y_i)\varphi_{|]y_i,y_{i+1}[}-\sum_{i=0}^{n-1}(y_{2+2}-y_{2i+1})\varphi_{]|y_{2i+1},y_{2i+2}[}+\frac{2Mn}{N}\\
&\le \int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t+2n\frac{M_\varepsilon+M}{N}.
\end{aligned}$$

Ajoutons que $\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t<\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\varepsilon$ et nous obtenons

$$D(t,f)<\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\varepsilon+2n\frac{M_\varepsilon+M}{N}.$$

Choisissons N suffisamment grand tel que $2n\frac{M_\varepsilon+M}{N}<\varepsilon$ et ainsi il existe une subdivision t telle que $D(t,f)<\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+2\varepsilon$, ce qui implique ($\varepsilon$ étant un réel arbitraire strictement positif) que $D(f)\le\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

De la même façon (découpage compris) on démontre que $d(f)\ge\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Le théorème 2.3 —propriété $d(f)\le D(f)$— permet de conclure que

$$d(f)=D(f)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Réciproque. Ce sera plus simple. En effet supposons que $d(f)=D(f)$. Soient $\varepsilon>0$, s et t deux subdivisions de $[a,b]$ telles que

$$D(s,f)-\varepsilon\le D(f)=d(f)\le d(t,f)+\varepsilon.$$

Si $s=(x_i)_{0\le i\le n}$ alors la fonction en escalier φ définie par

$$\varphi(x)=\begin{cases}\sup_{y\in[x_i,x_{i+1}]}f(y) & \text{si } x\in[x_i,x_{i+1}[\ (0\le i\le n-1),\\ f(b) & \text{sinon.}\end{cases}$$

est telle que $f\le\varphi$ sur $[a,b]$ et $D(s,f)=\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

On construit ψ de la même façon en remplaçant sup par inf et on obtient ψ en escalier telle que $\psi\le f$ sur $[a,b]$ et $d(t,f)=\int_a^b\psi(t)\,\mathrm{d}t$. Par hypothèse on a $D(s,f)-d(t,f)\le 2\varepsilon$, ce qui donne $\int_a^b\varphi(t)-\psi(t)\,\mathrm{d}t\le 2\varepsilon$. Ainsi f est Riemann intégrable. Le fait que $d(f)=D(f)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ découle de ce qui précède.

□