1. Topologie, espaces vectoriels normés

Topologie générale

1.1 Soient (E,T) un espace topologique et $(A_i)_{i=1}^n$, $n\in\mathbb{N}$, une famille de parties de E.

a) Montrer que

$$\overbrace{\bigcap_{i=1}^n A_i}^{\circ} = \bigcap_{i=1}^n \overset{\circ}{A_i}$$

S'assurer que la propriété est fausse pour une famille dénombrable en donnant un contre-exemple.

b) En déduire que

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

c) Établir que

$$\overbrace{\bigcup_{i=1}^n A_i}^{\circ} \supset \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{A_i}$$

S'assurer en donnant un exemple que l'inclusion est stricte en général.

1.2 Soit (E,T) un espace topologique.

a) Pour toute partie A de E et tout ouvert V de E, montrer que $A\cap V=\emptyset$ si et seulement si $\overline{A}\cap V=\emptyset$.

b) Soient U et V deux ouverts tels que $U\cap V=\emptyset$. Déduire de la question précédente que $\overset{\circ}{\overline{U}}\cap V=\emptyset$ puis que $\overset{\circ}{\overline{U}}\cap\overset{\circ}{\overline{V}}=\emptyset$.

1.3 Soient (E,T) et (F,T') deux espaces topologiques, f une application de E dans F et x un élément de E. On suppose que x admet une base dénombrable de voisinages. Alors f est continue en x si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

1.4 Montrer qu'un espace topologique (X,T) est séparé si et seulement si pour tout $x\in X$

$$\bigcap\{F : F \text{ voisinage fermé de } x\} = \{x\}.$$

1.5 Soit (E,T) un espace métrisable. Montrer que

a) Toute partie fermée est l'intersection d'une famille dénombrable de parties ouvertes.

b) En déduire que toute partie ouverte est réunion dénombrable de parties fermées.

1.6 Soit T_1, T_2 deux topologies sur un ensemble E. Montrer que si $T_1\supset T_2$, alors pour toute partie A,

$$\overline{A}^{T_1}\subset\overline{A}^{T_2} \quad\text{et}\quad \overset{\circ}{A}^{T_1}\supset\overset{\circ}{A}^{T_2}.$$

1.7 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique (X,d). Supposons que, pour toute sous-suite (x_{n_k}), x_{n_k} converge vers x_∞ quand k tend vers l'infini. Montrer que x_n tend vers x_∞ quand n tend vers l'infini.

1.8 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (X,d) et $x\in X$. Supposons que de toute sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite convergente vers x. Montrer qu'alors (x_n) converge vers x.

Topologie produit

Soit $(E_i,T_i)_{i\in I}$ une famille d'espace topologiques. On munit l'espace produit $E=\prod_{i\in I}E_i$ de la topologie la moine fine rendant continues toutes les projections $pr_i\ :\ E\longrightarrow E_i$. Ceci entraîne qu'une base de la topologie produit est l'ensemble des parties s'écrivant $\prod_{i\in I}O_i$ où tous les O_i sont des ouverts de E_i et où tous les O_i, sauf un nombre fini, sont égaux à E_i (une intersection finie d'ouverts est un ouvert). Seul le cas où I est infini demande des précautions dans la manipulation de cette topologie produit.

1.9 Montrer qu'un espace topologique, (E,T), est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta=\big\{(x,x),x\in E\big\}$ est fermé pour la topologie produit.

1.10 Soient (E,T) et (F,T') deux espaces topologiques et f une application continue de E dans F. On suppose de plus que F est séparé. Montrer que $\Gamma=\big\{(x,f(x))\,;\,x\in E\}$ est une partie fermé de $E\times F$.

1.11 Soient $(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espace métrique. On munit $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ de la topologie produit. Montrer que cette topologie coïncide avec la topologie engendrée par la distance

$$d(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}.$$

Pour cela il suffira de montrer que tout voisinage ouvert d'un élément y de $\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ contient une boule de centre y et de rayon ε par rapport à la métrique d et réciproquement.

Espaces vectoriels normés

Sauf mention contraire tous les espaces vectoriels considérées ont pour corps de base $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

1.12 Rappeler (brièvement) pourquoi $\mathbb{K}^n$ muni de la norme usuelle est complet.

1.13 Encore un rappel

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit f une application linéaire de E dans F. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes

(i) f est continue sur E.

(ii) f est continue en 0.

(iii) f est lipschitzienne, i.e. il existe $K>0$ tel que pour tout x dans E on a $\|f(x)\|_F\leq K\|x\|_E$.

1.14 Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel fermé dans E et G un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que $F+G$ est fermé. [on pourra commencer par montrer que si $x\notin F$ alors $F+x\mathbb{K}$ est fermé.]

En déduire que tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

1.15 Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ (le noyau de f) est fermé.

1.16 Conséquences des exercices 1–1.15

a) Une forme linéaire sur un espace vectoriel normé de dimension finie est toujours continue.

b) Toute application linéaire définie d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un autre espace vectoriel normé est continue. [on pourra commencer par le cas où l'espace d'arrivée est de dimension finie et regarder les applications coordonnées après avoir défini des bases dans chacun des espaces vectoriels]

c) Soit E un espace vectoriel normé quelconque de dimension n. Il existe une application linéaire bijective et bicontinue entre E et $\mathbb{K}^n$ (muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$). [après avoir défini une base de E étudier l'application qui à $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ associe le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)^t$.]

d) Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

e) Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie alors il est complet et les compacts de E sont les parties fermées et bornées de E.

REMARQUE Une autre façon d'aboutir à ces résultats est de commencer par montrer que sur un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalents. Si (E, N) désigne un tel e.v.n. et après avoir défini une base $e_1, \ldots, e_n$ on munit aisément E d'une norme $\|\cdot\|_\infty$. Ensuite on étudie Φ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associé $N(x)$. Φ est continue ($N(x) \le C_1\|x\|_\infty$). En utilisant la compacité de la sphère unité S_1 de $(E, \|\cdot\|_\infty)$, la fonction Φ atteint son minimum sur S_1, etc, on obtient la majoration $\|x\|_\infty \le C_2N(x)$. Toute norme est donc équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie sur E, d'où le résultat.

1.17 Montrer que si la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte, alors il est de dimension finie. [On montrera que si $\overline{B_1}$ est recouverte par $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \frac{1}{2})$, alors $\dim(E) \le p$. Pour cela on considère l'espace vectoriel M engendré par la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ puis on montre que $\overline{B_1} \subset M + B(0, \frac{1}{2^k})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ –pourquoi pas une récurrence. Déduire que $\overline{B_1} \subset M$. Conclure.]

1.18 Montrer qu'un e.v.n. est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente (c'est-à-dire telle que $\sum \|x_n\| < +\infty$) est convergente. [Pour la réciproque, on construira pour toute suite de Cauchy (x_n) une sous-suite (x_{n_k}) de sorte que la série de terme général $(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ soit absolument convergente.]

1.19 Montrer que la fermeture d'un sous-espace vectoriel dans un e.v.n. est un espace vectoriel.

1.20 Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach est un espace de Banach si et seulement si il est fermé.

1.21 Soit E un e.v.n. et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que F est d'intérieur vide si et seulement si F est un sous-espace strict de E (c'est-à-dire $F \neq E$).

b) Donner l'exemple de sous-espaces stricts denses. [On pourra prendre pour E l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $\sum |x_n| < \infty$.]

1.22 Produit d'e.v.n.

On rappelle que la topologie naturelle pour le produit $E = \prod_{i\in I} E_i$ d'espaces topologiques est la topologie de la convergence simple (par exemple, une suite (x^n) converge dans E si et seulement si chacune de ses composantes (x_i^n) converge).

a) Montrer que le produit fini d'e.v.n. est un e.v.n. et que le produit fini d'espaces de Banach est un espace de Banach.

b) Montrer que le produit infini d'e.v.n. (non réduits à $\{0\}$) n'est pas un e.v.n., i.e. ne peut être muni d'une norme dont la topologie coïncide avec la topologie produit. [On pourra commencer par supposer $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.]

1.23 L'espace $C_b(X)$

Soit X un espace topologique.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions scalaires bornées sur X, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_{B(X)} = \sup_X |f|$, est un espace de Banach.

b) Montrer que l'ensemble $C_b(X)$ des fonctions scalaires bornées continues sur X, muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach.

1.24 L'espace $C_b^1(\Omega)$

On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et on note $C_b^1(\Omega)$ l'espace des fonctions scalaires bornées définies sur Ω de classe C^1, à dérivées bornées.

$$\|f\|_{C_b^1(\Omega)} = \max\Big(\sup_\Omega |f|, \max_{1\le i\le n} \sup_\Omega \Big|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|\Big).$$

a) Montrer que $C_b^1(\Omega)$ est un espace de Banach.

b) Montrer que, lorsque Ω est convexe et borné, une norme équivalente est donnée par

$$\|f\| = \max\Big(|f(a)|, \max_{1\le i\le n} \sup_\Omega \Big|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|\Big).$$

avec $a \in \Omega$ arbitraire.

c) Comment s'étendent les résultats précédents à l'ensemble $C_b^k(\Omega)$ des fonctions de classe C^k à derivées d'ordre $\le k$ bornées.

1.25 L'espace $\ell^p(\mathbb{N})$

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans $\mathbb{K}$. On définit les quantités

$$\|a\|_{\ell^p} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty), \qquad \|a\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

On considère les sous-espaces de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suivants

- l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ des suites telle que $\|a\|_{\ell^p} < \infty$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^p}$;
- l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$;
- l'espace $c(\mathbb{N})$ des suites convergentes, muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$;
- l'espace $c_0(\mathbb{N})$ des suites convergeant vers 0, muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.

a) Écrire les inclusions entre les différents espaces.

b) Montrer que les espaces précédents sont des espaces de Banach. [pour montrer que l'on a bien une norme quand $1 < p < +\infty$, on rappelle l'inégalité de Young : $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{p-1}{p}y^{p/(p-1)}$. Cette inégalité vient de la convexité de la fonction exponentielle. Grâce à l'inégalité de Young et par sommation on obtient l'inégalité de Hölder, etc.]

c) Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ mais que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

d) Montrer que l'ensemble $c_c(\mathbb{N})$ des suites nulles à partir d'un certain rang (variable) muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ est un e.v.n. Est-il complet ?

e) Pour chacun des espaces suivants, construire une suite d'éléments de norme ≤ 1 n'admettant pas de sous-suite convergente.

1.26 L'espace $L^p(X,\mathscr{F},\mu)$

Soit $(X,\mathscr{F},\mu)$ un espace mesuré et $p \in [1,+\infty[$. Montrer que l'espace $L^p(X,\mathscr{F},\mu)$ des (classes d'équivalence des) fonctions scalaires (égales p.p.) de puissance p-ème intégrable, muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach. [On pourra commencer par supposer $p = 1$ et on montrera que toute série normalement convergente est convergente.]

1.27 L'espace $L^\infty(X,\mathscr{F},\mu)$

Soit $(X,\mathscr{F},\mu)$ un espace mesuré. Une fonction scalaire f, définie sur X et mesurable, est *essentiellement bornée* si elle est bornée en dehors d'un ensemble négligeable. On associe alors la quantité

$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} = \inf\{C \geq 0 \mid |f| \leq C \text{p.p.}\}.$$

Cette quantité est bien sûr inchangée si on remplace f par une fonction égale p.p. On note $L^\infty(X,\mathscr{F},\mu)$ l'ensemble des (classes d'équivalence des) fonctions (égales p.p.) essentiellement bornées.

a) Étant donnée une fonction essentiellement bornée f, montrer que le nombre $m = \|f\|_{L^\infty(\mu)}$ est caractérisé par

$$|f| \leq m \text{p.p.} \qquad \text{et} \quad \mu(|f| > m - \varepsilon) > 0 \quad \text{pour tout } \ \varepsilon > 0.$$

b) Montrer qu'une suite (f_n) de $L^\infty(X,\mathscr{F},\mu)$ converge vers une fonction f (resp. est de Cauchy) si et seulement si il existe une partie négligeable N telle que la suite (f_n) converge uniformément sur $X\backslash N$ (resp. est de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme sur $X\backslash N$).

c) Montrer $L^\infty(X,\mathscr{F},\mu)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(\mu)}$.

Applications linéaires

1.28 Extension d'une application linéaire

Soit F un sous-espace d'un e.v.n. E, G un espace de Banach, u une application linéaire continue de F dans G.

Montrer que u s'étend de façon unique en une application linéaire continue u' de $\overline{F}$ dans G et que

$$\|u\|_{\mathscr{L}(F,G)} = \|u'\|_{\mathscr{L}(\overline{F},G)}.$$

1.29 On associe à une suite (a_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$ l'opérateur de multiplication sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$u_a x = (a_0 x_0, a_1 x_1, \ldots).$$

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que u_a soit continu de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $\ell^p(\mathbb{N})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ et calculer sa norme.

b) Même question pour la continuité de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $\ell^r(\mathbb{N})$ $(1 \leq r < p \leq \infty)$.

1.30 Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $C(K)$, l'espace des fonctions continues de K vers $\mathbb{C}$. On considère l'application $u\,:\, C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f \longmapsto \int_K f(t)dt.$$

Montrer que u est un element du dual topologique de $C(K)$.

1.31 Soit $(X, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré. On note p' l'exposant conjugué de p, $1 \leq p \leq \infty$ (défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$). Étant donné $g \in L^{p'}(\mu)$, on définit la forme linéaire sur $L^p(\mu)$

$$u_g(f) = \int_X f g \, d\mu.$$

a) Lorsque $p > 1$, montrer que u_g est une forme linéaire continue sur $L^p(\mu)$ et calculer sa norme.

b) Même question lorsque $p = 1$ en supposant que X est *σ-fini* (c'est-à-dire est la réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie).

1.32 **Opérateur de Volterra**

Soit $K \in C([0,1]^2)$. On définit l'application linéaire de $C([0,1])$ dans $C([0,1])$

$$Tf(x) = \int_0^x K(x,y) f(y)\, dy.$$

a) Montrer que T est une application linéaire continue.

b) Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|T^n\|_{\mathscr{L}\left(C([0,1]),C([0,1])\right)} \leq \frac{1}{n!} \|K\|^n_{C([0,1]^2)}.$$

c) Montrer que, pour tout $f \in C([0,1])$, la série $\sum T^n f$ converge normalement dans $C([0,1])$. Si on note $g = \sum T^n f$, que vaut $(I - T)g$?

d) En déduire que l'application $I - T$ est *inversible* (i.e. est un homéomorphisme linéaire).

1.33 **Applications bilinéaires**

Soient E, F, G trois e.v.n.

a) Soit $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire (c'est-à-dire linéaire en chacune de ses variables). Montrer l'équivalence des assertions suivantes
– b est continue ;
– b est continue en $(0,0)$;
– il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|b(x,y)\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F, \qquad \text{pour tout} \quad (x,y)\in E\times F.$$

b) On note $\mathscr{L}(E,F;G)$ l'ensemble des applications bilinéaires continues de $E\times F$ dans G. À toute application bilinéaire continue, on associe la quantité

$$\|b\|_{\mathscr{L}(E,F;G)} = \sup\{\|b(x,y)\|_G \mid \|x\|_E \leq 1,\ \|y\|_F \leq 1\}.$$

i) Montrer que $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(E,F;G)}$ est une norme sur $\mathscr{L}(E,F;G)$.

ii) Montrer que $\mathscr{L}(E,F;G)$ est un espace de Banach lorsque G est un espace de Banach.

c) Comment s'étendent ces résultats aux applications multi-linéaires (applications de $E_1\times\cdots\times E_n \to G$ linéaire en chacune des variables) ?

Compléments sur la dimension infinie

Il est relativement aisé d'exhiber une application linéaire non continue d'un espace vectoriel normé dans un autre. Par exemple si E est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, dérivables en 0 et muni de la norme $\|f\|_\infty$ (la norme n'a rien à voir avec la propriété de dérivabilité en 0) on vérifiera que l'application $\varphi(f) = f'(0)$ n'est pas continue. Il suffit de regarder les fonctions f_n affines valant nx sur $[0,1/n]$ et 1 sur $[1/n,1]$. En dimension infinie on doit utiliser le lemme de Zorn ou une de ces conséquences : l'existence d'une base algébrique ou base de Hamel. Une base de Hamel est une famille de vecteur $(e_i)_{i\in I}$ tel que tout élément x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire –finie– de vecteurs e_i.

1.34 Une forme linéaire non continue

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de Hamel de E. On extrait de cette famille une famille dénombrable de vecteurs $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ –distincts deux à deux. Comme $(e_i)_{i\in I}$ est une base de Hamel de E pour définir une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ il suffit de définir $\varphi(e_i)$ pour tout $i\in I$ –s'en persuader. Pour tout $k\in\mathbb{N}$ posons $\varphi(a_k) = \alpha_k \in \mathbb{K}$ et $\varphi(e_i) = 0$ si $e_i \notin \{a_k;\, k\in\mathbb{N}\}$. Comment choisir les α_k de façon à ce que φ ne soit pas continue.

1.35 Une réciproque

Soit E un espace vectoriel normé tel que deux normes quelconques sur E soient toujours équivalentes. Soit $\|\cdot\|_E$ une norme quelconque sur E et soit f une forme linéaire sur E. Montrer que $\|x\|_E + |f(x)|$ est une norme sur E. En déduire que E est de dimension finie.

2. Convexité, théorèmes de Hahn-Banach

Forme analytique du théorème de Hahn-Banach

2.1 Théorème de Hahn-Banach dans un espace de Hilbert

On donne une démonstration directe du théorème de Hahn-Banach dans un espace de Hilbert, basé sur le théorème de Riesz. Soient H un espace de Hilbert, M un sous-espace vectoriel de H et f une forme linéaire continue sur M.

a) Montrer qu'il existe une forme linéaire $\overline{f}$ sur $\overline{M}$ prolongeant f de norme $\|\overline{f}\|_{\overline{M}'} = \|f\|_{M'}$.

b) Montrer qu'il existe $y \in \overline{M}$ tel que $\overline{f} = (y, \cdot)$ sur $\overline{M}$ avec $\|y\|_H = \|f\|_{M'}$.

c) Construire une extension continue $\widetilde{f}$ de f à H de norme $\|\widetilde{f}\|_{H'} = \|f\|_{M'}$.

d) Montrer l'unicité d'une telle extension.

2.2 Soient E un e.v.n., F un sous-espace vectoriel et X un ensemble quelconque. On note $B(X)$ l'espace de Banach des fonctions scalaires bornées muni de la norme de la convergence uniforme.

Montrer que toute application linéaire continue Φ de F dans $B(X)$ s'étend en une application linéaire continue $\widetilde{\Phi}$ de E dans $B(X)$ avec $\|\widetilde{\Phi}\|_{L(E,B(X))} = \|\Phi\|_{L(M,B(X))}$.

2.3 Soient E un e.v.n., M un espace vectoriel de E et $x \in E$.

a) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f sur $N = M + \mathbb{K}x$ de norme ≤ 1 telle que $f(x) = d(x, M)$ et $f = 0$ sur M. [On distinguera les cas $x \in \overline{M}$ et $x \not\in \overline{M}$.]

b) En déduire qu'il existe une forme linéaire continue sur E avec les propriétés ci-dessus.

c) Comment choisir l'extension de f lorsque E est un espace de Hilbert ?

2.4 Soient E un e.v.n. et E' son dual. Pour tout $x' \in E'$, on a, par définition de la norme duale, l'identité

$$\|x'\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\langle x', x\rangle|.$$

On va montrer que la borne supérieure n'est pas atteinte en général lorsque $E = L^1([0,1])$, c'est-à-dire $E' = L^\infty([0,1])$.

On fixe une fonction $f \in L^\infty([0,1])$ non nulle.

a) Montrer que la borne supérieure est atteinte lorsque l'ensemble $A = \{|f| = \|f\|_{L^\infty}\}$ est de mesure > 0.

b) Réciproquement, on suppose qu'il existe $g \in L^1([0,1])$ tel que $\|g\|_{L^1} = 1$ et $|\int fg| = \|f\|_{L^\infty}$.

- i) Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $B_\varepsilon = \{|f| < \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\}$. Montrer que $\int_{B_\varepsilon} |g| = 0$.
- ii) En déduire que A est de mesure > 0.

c) Que peut-on conclure pour $f(x) = x$?

2.5 Exemple en dimension infinie de deux ensembles convexes disjoints non séparés au sens large
Dans l'espace $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N}^*)$ on considère les ensembles

$$A_0 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1 \,;\, x_{2n} = 0,\ \forall n \geq 1\} \quad \text{et} \quad B = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \,;\, x_{2n} = 2^{-n} x_{2n-1},\ \forall n \geq 1\}.$$

a) Montrer que A_0 et B sont des s.e.v. fermés dans ℓ^1 et que $A_0 + B$ est dense dans ℓ^1.

b) Soit $c \in \ell^1$ tel que $c_{2n-1} = 0$ et $c_{2n} = 2^{-n}$. Montrer que $c \notin A_0 + B$ et que, pour $A \overset{\text{def}}{=} A_0 - c$, $A \cap B$ est vide. Démontrer que A et B ne peuvent être séparés au sens large.

2.6 Opérations sur les ensembles
Soit E un espace vectoriel. Étant donnés deux ensembles A et B de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les ensembles

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}, \qquad \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}, \qquad A - B = A + (-B).$$

a) Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles ainsi obtenus. [Commencer par le cas où B est un singleton.]

b) Soient s et t deux réels > 0. Montrer que $(s + t)A \subset sA + tA$, mais que l'inclusion est stricte en général.

c) Montrer que A est convexe si et seulement si, pour tous réels $s > 0$ et $t > 0$, on a $sA + tA = (s + t)A$.

d) Montrer que si A et B sont convexes, $A + B$ est convexe.

2.7 Opérations sur les ensembles (suite)
Soit E un e.v.n.

a) Montrer que si A ou B est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

b) Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

c) Montrer que si A est fermé et B est compact, alors $A + B$ est fermé.

d) Montrer que la somme de deux fermés n'est pas fermé en général. [Considérer dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.]

2.8 Soit E un e.v.n.

a) Montrer que l'adhérence d'un ensemble convexe est un ensemble convexe.

b) Soit A une partie convexe. Montrer que, pour tout $a \in \operatorname{int}(A)$ et tout $b \in \overline{A}$, on a $[a, b[\in \operatorname{int}(A)$ (avec $[a, b[= \{(1 - t)a + tb \mid 0 \leq t < 1\}$). [On pourra commencer par supposer $b \in A$.]

c) Montrer que l'intérieur d'un ensemble convexe est un ensemble convexe.

d) Montrer que, pour toute partie convexe d'intérieur non vide, on a $\overline{\operatorname{int} A} = \overline{A}$.

2.9 Montrer qu'un hyperplan affine dans un e.v.s.n. est fermé ou dense. [On se ramènera par translation au cas d'un hyperplan vectoriel F d'un espace vectoriel E. En fixant $x \in E \backslash F$, on distinguera les cas $x \in \overline{F}$ et $x \notin \overline{F}$.]

2.10 Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n. Par définition, un demi-espace fermé de E est un ensemble de la forme $\{f \leq \alpha\}$ pour $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'un demi-espace fermé est un ensemble convexe fermé.

b) Montrer que tout ensemble convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

2.11 Enveloppe convexe

Soit E un espace vectoriel et A une partie de E. On appelle $\operatorname{conv} A$ l'intersection de toutes les parties convexes contenant A.

a) Montrer que $\operatorname{conv} A$ est le plus petit ensemble convexe contenant A.

b) Montrer qu'une partie B est convexe si et seulement si elle contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments, c'est-à-dire si et seulement si pour tous $(t_i)_{i=1,\dots,n}$, $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ vérifiant $t_i \geq 0$, $x_i \in A$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in A$.

c) Montrer que l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de A, c'est à dire

$$\operatorname{conv} A = \{\sum_{i=1}^n t_i x_i \mid t_i \geq 0,\ x_i \in A,\ \sum t_i = 1\}.$$

2.12 Enveloppe convexe fermée

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n. et A une partie de E. L'adhérence de l'enveloppe convexe de A est appelée enveloppe convexe fermée de A et est notée $\overline{\operatorname{conv}} A$.

a) Montrer que $\overline{\operatorname{conv}} A$ est le plus petit ensemble convexe fermé contenant A et est l'intersection de tous les ensembles convexes fermés contenant A.

b) Montrer que $\overline{\operatorname{conv}} A$ est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant A [Utiliser 2.10.]

c) On suppose que E est un espace de Banach. On veut montrer que l'enveloppe convexe fermée d'une partie compacte A est compacte.

i) Montrer que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compact. [On montrera que $\operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ est l'image d'un compact par une application continue.]

ii) En déduire que $\operatorname{conv} A$ est précompact.

iii) Conclure.

2.13 Polarité

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n. de dual E'. On définit le *polaire* d'un ensemble A de E, resp. d'un ensemble B de E', par

$$A^\circ = \{x' \in E' \mid \sup_{x \in A} \langle x', x\rangle \leq 1\}, \qquad B^\circ = \{x \in E \mid \sup_{x' \in B} \langle x, x'\rangle \leq 1\}.$$

a) Étant donnés deux ensembles A de E et B de E' resp., montrer que A° et B° sont des ensembles convexes fermés contenant 0 de E' et E resp.

b) Lorsque A est un ensemble convexe fermé contenant 0, montrer que $(A^\circ)^\circ = A$.

c) Montrer que $(A^\circ)^\circ$ est l'enveloppe convexe fermée de $A \cup \{0\}$. [On montrera que si $A_1 \subset A_2$, on a $(A_1^\circ)^\circ \subset (A_2^\circ)^\circ$]

2.14 Soit $1 < p < +\infty$ et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |a| < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n = (a^{kn})_{k \geq 1}$, ce qui donne une famille de suites. Montrer que $f_n \in \ell^p(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que l'ensemble des combinaisons linéaires finies des f_n est dense dans ℓ^p.

2.15 a) Pourquoi existe-t-il une forme linéaire continue non nulle sur ℓ^∞, nulle sur c_0 ?

b) En déduire que le plongement canonique de ℓ^1 dans $(\ell^\infty)'$ (si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ on associe l'application qui à $v \in \ell^\infty$ donne $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n u_n$) est non surjectif.

3. Baire, Banach-Steinhaus et Cie

THÉORÈME DE BAIRE

3.1 Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont-ils maigres dans $\mathbb{R}$? [un ensemble est dit maigre s'il est inclus dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide]

3.2 a) Soit E un espace topologique, F un espace métrique et f une fonction de E dans F. On va montrer que l'ensemble des points de continuité de f est une intersection dénombrable d'ouverts.

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \{x \in E \mid \exists V \in \mathcal{V}_x,\ \forall (y,z) \in V \times V \quad d\big(f(y), f(z)\big) \leq \frac{1}{n}\}.$$

Montrer que U_n est un ouvert.

ii) Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est $U = \bigcap U_n$.

b) i) Montrer qu'il n'existe pas de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont les points de continuité soit $\mathbb{Q}$ exactement.

ii) Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \qquad f(x) = \frac{1}{q} \quad \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ (fraction irréductible)}$$

admet $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ comme point de continuité exactement.

3.3 Soit E un espace de Baire.

a) Montrer que tout ouvert de E est un espace de Baire.

b) Soit (F_n) une suite de fermés recouvrant E.

i) Montrer qu'il existe n tel que $\mathrm{int}(F_n) \neq \emptyset$.

ii) Montrer que $\bigcup \mathrm{int}(F_n)$ est un ouvert dense. [En utilisant les questions précédentes, on montrera que, pour tout ouvert non vide U, il existe n tel que $\mathrm{int}(F_n)$ coupe U.]

THÉORÈME DE BANACH-STEINHAUS

Le théorème de Banach-Steinhaus est aussi appelé « Principle of Uniform Boundedness » et il est remarquable que des estimations ponctuelles donnent une estimation uniforme. Le résultat reste vrai avec E Banach et F espace vectoriel normé : ce qui compte est que l'espace de départ ait la propriété de Baire.

3.4 **Une autre forme du théorème de Banach-Steinhaus**
Soient E un espace de Banach et F un e.v.n. Soit (T_i) une famille d'applications linéaires continues de E dans F telle que $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\|_{L(E,F)} = +\infty$.
Montrer que l'ensemble $\{x \in E \mid \sup_{i\in I} \|T_i x\|_F < +\infty\}$ est un sous-espace vectoriel maigre.

3.5 Soient E et F deux espaces de Banach. On dit qu'une partie B de E est *totale* si l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par B est E.

Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

– $(T_n x)$ converge pour tout $x \in E$,

– $(T_n y)$ converge pour tout y d'une partie totale et $\sup\limits_n \|T_n\|_{L(E,F)} < +\infty$.

3.6 Contre-exemples

a) Soient $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme donnée par le sup des coefficients. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n définie par $T_n(P) = P^{(n)}(0)$.

b) Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$. On considère pour tout $h \in]0,1[$ l'application T_h définie par $T_h(f) = \frac{f(h)-f(0)}{h}$.

3.7 Soient E un espace de Banach, F un e.v.n. et (f_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que, pour toute suite (x_n) de E convergeant vers x, on a $f_n(x_n) \to f(x)$. [utiliser Banach-Steinhaus et la décomposition $f_n(x_n) - f(x) = f_n(x_n) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)$]

3.8 Applications bilinéaires

Soient E un espace de Banach, F et G deux e.v.n. et b une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. D'après l'exercice 1.33 l'application b est continue si et seulement l'une des trois conditions équivalentes est vérifiées :

– b est continue ;

– b est continue en $(0,0)$;

– il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|b(x,y)\|_G \leq C\|x\|_E \|y\|_F, \qquad \text{pour tout} \quad (x,y) \in E \times F.$$

Dans le cas d'applications non linéaires on doit se souvenir que la continuité par rapport à chaque variable n'est pas suffisante pour avoir la continuité. Dans le cas des applications linéaires (évident en dimension finie) le but de cet exercice est de montrer que si E ou F est un Banach alors cela est suffisant.

Montrer que b est continue si et seulement si elle est continue par rapport à chacune de ses variables (c'est-à-dire si les applications partielles $b(x,\cdot)$ $(x \in E)$ et $b(\cdot,y)$ $(y \in F)$ sont continues). [On utilisera par exemple l'application $b(\cdot, y_n)$ qui est linéaire, continue de E dans G et l'exercice 3.7.]

3.9 Montrer qu'il n'existe pas de norme sur l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{K}[X]$ qui lui donne une structure d'espace de Banach. [On montrera que $\mathbb{K}[X]$ ne peut pas être un espace de Baire.] D'une façon générale on démontre que si E est un Banach alors toute base de Hamel (base algébrique) est finie ou non dénombrable.

3.10 Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On rappelle que, pour tout $a \in \ell^q(\mathbb{N})$ (avec q exposant conjugué de p), la forme linéaire sur $\ell^p(\mathbb{N})$ définie par $T_a x = \sum\limits_n a_n x_n$ est continue avec $\|T_a\|_{(\ell^p)'} = \|a\|_{\ell^q}$.

Soit $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sur $\mathbb{K}$ telle que, pour tout $x \in \ell^p$, la série $\sum_n b_n x_n$ converge. Montrer que $b \in \ell^q$.

3.11 Matrices infinies

Soit $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une matrice infinie vérifiant $\sum_n |a_{mn}| < \infty$ pour tout $m\in\mathbb{N}$. On associe l'opérateur défini sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ par $y = Ax$ avec $y_m = \sum_n a_{mn}x_n$. On rappelle que $c(\mathbb{N})$, resp. $c_0(\mathbb{N})$, désigne l'espace de Banach des suites convergentes, resp. convergeant vers 0.

a) On veut montrer que A est un endomorphisme continu de $c_0(\mathbb{N})$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\lim_{m\to\infty} a_{mn} = 0 \quad \text{pour tout } \ n\in\mathbb{N}, \qquad \sup_m \sum |a_{mn}| < +\infty.$$

i) Montrer que les conditions sont suffisantes.

ii) Montrer qu'elles sont nécessaires.

b) Montrer que A est un endomorphisme continu $c(\mathbb{N})$ tel que $\lim (Ax)_n = \lim x_n$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\lim_{m\to\infty} a_{mn} = 0 \quad \text{pour tout } \ n\in\mathbb{N}, \qquad \sup_m \sum_n |a_{mn}| < +\infty, \qquad \lim_{m\to\infty}\sum_n a_{mn} = 1.$$

3.12 Séries de Fourier

On considère les ensembles $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ des fonctions complexes continues 2π-périodiques et $L^p_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ $(1\le p<\infty)$ l'ensemble des fonctions boréliennes 2π-périodiques telles que

$$\|f\|^p_{L^p_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\,dt < +\infty.$$

Ce sont des espaces de Banach. De plus, $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$. À $f\in L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$, on associe sa série de Fourier partielle en $t\in\mathbb{R}$

$$S^t_n(f) = S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}, \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iks}f(s)\,ds, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

On rappelle que, pour tout $f\in L^2_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$, $S_n(f)$ converge vers f dans $L^2_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$. On va montrer que ce résultat est faux dans $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$. On fixe $t\in\mathbb{R}$.

a) Vérifier que, pour tout $f\in L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$, on a

$$S^t_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_n(t-s)\,ds$$

où D_n désigne le noyau de Dirichlet

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\Big(\big(n+\frac12\big)t\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t}{2}\Big)}.$$

b) Montrer que S^t_n est une forme linéaire continue sur $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ et que $\|S^t_n\|_{C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})'} \le \|D_n\|_{L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})}$.

c) Montrer que $\|S^t_n\|_{C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})'} = \|D_n\|_{L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})}$. [On posera $g(s) = \mathrm{sgn}\big(D(t-s)\big)$ et on vérifiera que la densité de $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ implique l'existence d'une suite de fonctions continues (g_k) avec $|g_k|\le 1$ et $\|g_k - g\|_{L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})} \to 0$.]

d) Montrer qu'il existe une constante $c>0$ telle que $\|D_n\|_{L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})} \geq c\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

e) En déduire que l'ensemble des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas simplement est dense dans $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$. [Utiliser 3.4]

THÉORÈMES DE L'APPLICATION OUVERTE ET DU GRAPHE FERMÉ

3.13 Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes faisant de l'espace vectoriel E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $x\in E$, $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. [considérer l'application identité et utiliser le théorème de l'application ouverte]

3.14 Théorème de Hellinger-Toeplitz
Soit H un espace de Hilbert et T un endomorphisme symétrique de H, i.e. un endomorphisme vérifiant $(Tx,y)=(x,Ty)$ pour tous x, y de H. Montrer que T est continu. [on pourra utiliser le théorème du graphe fermé en jouant avec la propriété vérifiée par T]

3.15 Soient E et F deux espaces de Banach, T une application linéaire de E dans F. Montrer que T est continue si et seulement si, pour tout $y'\in F'$, on a $y'\circ T\in E'$.
Refaire l'exercice 3.14 avec ce résultat et le théorème de Riesz.

3.16 Extrait de l'examen de septembre 2008
Soient E un espace de Banach et E' son espace dual topologique. On considère une application linéaire T de E dans E' telle que

$$\forall x\in E,\quad \big(f(x)\big)(x)\geq 0;$$

a) On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que la suite des couples $\big(x_n\,T(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x,f) dans l'espace produit $E\times E'$ (E' est muni de la topologie forte). Pour y quelconque dans E, calculer la limite de la suite $\big(T(x_n)-T(y_n)\big)(x_n-y)$.

b) Déduire que la question a) que l'on a

$$\forall y\in E,\quad f(x-y)\geq \big(T(y)\big)(x-y).$$

c) En utilisant les questions a) et b) et le théorème du graphe fermé, conclure que T est une application continue de E dans E'.

3.17 Supplémentaires topologiques
Soit E un espace de Banach. On dit qu'un sous-espace vectoriel fermé F de E admet un supplémentaire topologique G si G est un sous-espace vectoriel *fermé* en somme directe avec F.

a) Montrer que F admet un supplémentaire topologique G si et seulement si l'application linéaire $(y,z)\mapsto y+z$ de $F\times G$ dans E est un isomorphisme (bicontinu).

b) Montrer que F admet un supplémentaire topologique si et seulement si il existe une projection continue sur F (c'est-à-dire une application $P\in L(E)$ d'image F telle que $P^2=P$).

3.18 Soit $(X,\mathscr{F},\mu)$ un espace mesuré avec μ mesure positive σ-finie.

a) On suppose qu'il existe $1\leq p<q\leq\infty$ tel que $L^q(\mu)\subset L^p(\mu)$. Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que $\|f\|_{L^p(\mu)}\leq C\|f\|_{L^q(\mu)}$ pour tout $f\in L^q(\mu)$. [On montrera la continuité de l'injection de $L^q(\mu)$ dans $L^p(\mu)$.]

b) En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes
– il existe $1 \le p < q \le \infty$ tel que $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$.
– $\mu(X) < +\infty$.
– pour tous $1 \le p < q \le \infty$, on a $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$.

3.19 Soit $(X, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré avec μ mesure positive σ-finie. À une fonction $\psi \in L^\infty(\mu)$, on associe l'opérateur de multiplication par ψ défini de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu)$ par $M_\psi f = \psi f$, $f \in L^2(\mu)$.

a) Montrer que M_ψ est continue avec $\|M_\psi\| = \|\psi\|_{L^\infty}$.

b) Montrer que M_ψ est surjective si et seulement si elle est bijective.

c) Montrer qu'une fonction $\varphi \in L^\infty(\mu)$ est positive p.p. si et seulement si, pour toute fonction positive $f \in L^1(\mu)$, on a $\int f\varphi\, d\mu \ge 0$.

d) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : M_ψ est surjective ; M_ψ est un isomorphisme ; il existe une constante $c > 0$ telle que $|\psi| \ge c$ p.p.

3.20 Soient E et F deux espaces de Banach.

a) On dit qu'une application linéaire continue $T \in L(E,F)$ est presque surjective s'il existe des constantes $0 \le r < 1$ et $M > 0$ telles que

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \qquad \|T(x) - y\| \le r\|y\| \quad \text{et} \quad \|x\| \le M\|y\| = M\|T(x)\|.$$

Montrer qu'une application presque surjective est surjective. [On procèdera comme dans la preuve du théorème de l'application ouverte en construisant par récurrence une suite (x_n) telle que $\|T(x_0) + \cdots + T(x_n) - y\| \le r^{n+1}\|y\|$ et $\|x_n\| \le Mr^n\|y\|$]

b) En déduire que l'ensemble des applications surjectives de $L(E,F)$ est un ouvert de $L(E,F)$.

3.21 Séries de Fourier (suite)

On garde les notations de l'exercice 3.12. On rappelle que l'ensemble des fonctions continues périodiques est dense dans $L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$.

a) Lemme de Riemann-Lebesgue.

i) Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques (c'est-à-dire l'espace vectoriel engendré par $\{e^{ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$) est dense dans $L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$.

ii) En déduire que, pour tout $f \in L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$, on a $\lim_{|n|\to\infty} c_n(f) = 0$.

b) On note T l'application linéaire de $L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$ dans $c_0(\mathbb{Z})$ qui à une fonction intégrable f associe ses coefficients de Fourier $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$.

i) Montrer que T est continue avec $\|T\| \le 1$.

ii) Soit f une fonction $f \in L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})$ vérifiant $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt = 0$ pour tout polynôme trigonométrique g. Montrer que f est nulle p.p.

iii) En déduire que T est injective.

iv) Pour n fixé, on rappelle que le noyau de Dirichlet $D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ vérifie $\|D_n\|_{L^1_{\text{per}}(\mathbb{R})} \to +\infty$. Montrer que T n'est pas surjective.

3.22 Soit E un espace de Banach et soient G et L deux sous espaces vectoriels fermés tels que $G + L$ est fermé. Montrer qu'il existe une constant $C \ge 0$ telle que

$$\text{tout } z \in G + L \text{ admet une décomposition de la forme}$$
$$z = x + y \quad \text{avec} \quad x \in G,\ y \in L,\ \|x\| \le C\|z\|,\ \|y\| \le \|z\|.$$

[considérer l'espace produit $G \times L$ et T de $G \times L$ dans $G + L$ la surjection canonique et appliquer le théorème de l'application ouverte]

Séparabilité

4.1 Séparabilité

On rappelle qu'un espace métrique est *séparable* s'il admet un ensemble dénombrable dense.

a) Montrer qu'un espace métrique est séparable si et seulement si sa topologie admet une base dénombrable (c'est-à-dire que tout ouvert est la réunion d'une famille dénombrable d'ouverts).

b) Montrer qu'une partie d'un espace métrique séparable est séparable.

c) Une partie D d'un e.v.n. E est *totale* si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E. Montrer qu'un e.v.n. est séparable si et seulement si il admet une famille totale dénombrable.

4.2 On veut montrer qu'un e.v.n. E dont le dual E' est séparable est séparable.

a) Soit (x'_n) une suite dense dans $B_{E'}$. Montrer qu'il existe $x_n \in B_E$ tel que $|\langle x'_n, x_n\rangle| \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|$.

b) On pose $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que, pour tout $x' \in D^\perp$, on a $\|x' - x'_n\| \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|$.

c) En déduire que $D^\perp = \{0\}$ et que D est dense dans E.

4.3 Séparabilité des espaces ℓ^p

On garde les notations de l'exercice 1.25.

a) Montrer que les espaces ℓ^p $(1 < p < \infty)$, c (des suites convergentes), c_0 (des suites convergeant vers 0) sont séparables. [On utilisera l'exercice 4.1.]

b) Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable. [On notera que, pour tous élements distincts $a \neq b$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on a $\|a-b\|_\infty = 1$.]

Espaces réflexifs

4.4 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach. Le *bidual* $E'' = (E')'$ est le dual du dual E' de E. C'est un espace de Banach. On définit canoniquement une application $J : E \to E''$ où $J(x) \in E''$ est la forme linéaire continue sur E' donnée par $\langle J(x), x'\rangle_{E''\times E'} = \langle x, x'\rangle_{E\times E'}$.

a) Montrer que J est une application linéaire isométrique de E dans E''.

b) Montrer que $J(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E''. Lorsque J est un isomorphisme, on dit que E est *réflexif*.

c) Montrer qu'un espace de Hilbert est réflexif. [On pourra supposer H réel pour simplifier et on écrira J en fonction de l'isomorphisme de Riesz $\sigma : H \to H'$ donné par $\sigma x = (\cdot, x)$.]

d) Montrer que, dans un espace réflexif, les topologies faibles et $*$-faibles coïncident (c'est-à-dire que J est un homéomorphisme de $\big(E, \sigma(E,E')\big)$ dans $\big(E'', \sigma(E'',E')\big)$).

e) On rappelle que la boule unité de E' est $*$-faiblement compacte (théorème de Banach). Montrer que la boule unité d'un espace réflexif est faiblement compacte.

On a aussi la réciproque (théorème de Kakutani) : un e.v.n. dont la boule unité est faiblement compacte est réflexif.

f) i) On suppose E' séparable. Montrer que la boule unité B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E,E')$. [On vérifiera que, si on note $\{x'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable dense dans $B_{E'}$, la distance $d(x,y) = \sum_n 2^{-n}|\langle x'_n, x-y\rangle|$ induit la topologie faible sur B_E.]

ii) Montrer que le dual d'un espace réflexif séparable est séparable. [On utilisera 4.2.]

iii) Conclure que toute suite bornée d'un espace réflexif séparable admet une sous-suite faiblement convergente.

On a plus généralement le résultat délicat suivant. Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente (théorème de Eberlein-Smulian).

g) Une fonction définie sur un espace vectoriel normé E est *coercive* si $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$. Soit E un espace de Banach réflexif, C un ensemble convexe fermé de E, f une fonction coercive, convexe, (fortement) s.c.i., à valeurs dans $]-\infty,\infty]$, telle que $f \not\equiv \infty$ sur C.

i) Montrer que f admet un minimum.

ii) Montrer que ce minimum est unique lorsque f est strictement convexe (c'est-à-dire $f\big(tx+(1-t)y\big) < tf(x)+(1-t)f(y)$ pour tout $0<t<1$, $x \neq y$ avec $x, y \in \operatorname{dom} f$).

CONVERGENCE FAIBLE

4.5 Topologie faible dans un espace de Hilbert

Montrer que, dans un espace de Hilbert, la topologie faible est la topologie d'e.v.s.n. définie par la famille de semi-normes $\{|(\cdot,y)| \mid y \in H\}$.

4.6 Soit H un espace de Hilbert.

a) Montrer l'identité $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(x,y)$.

b) Soit (x_n) une suite convergeant faiblement vers x. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
- la suite (x_n) converge fortement vers x ;
- $\|x_n\| \to \|x\|$ quand $n\to\infty$;
- $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \le \|x\|$.

4.7 a) Soit E un espace de Banach. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes
- la suite x_n converge faiblement vers x ;
- la suite x_n est bornée et $\langle y', x_n\rangle$ converge vers $\langle y', x\rangle$ pour tout y' d'une partie totale de E'.

[Pour montrer que la deuxième assertion implique la première, on montrera que l'ensemble des x' tels que $\langle x', x_n\rangle \to \langle x', x\rangle$ est un sous-espace vectoriel fermé de E'.]

b) Caractériser de façon analogue la convergence $*$-faible dans E'.

c) Qu'obtient-on lorsque E est un espace de Hilbert ?

4.8 Déterminer la nature de la convergence des suites suivantes de $\ell^2(\mathbb{N})$ (convergence forte, faible, divergence)

$$x_n = e_n, \qquad y_n = \sum_{1\le k\le n} \frac{e_k}{k}, \qquad z_n = \sum_{1\le k\le n} \frac{e_k}{\sqrt{k}}.$$

4.9 On considère la suite de $L^2(]-\pi,\pi[)$ définie par $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} e^{ikx}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que u_n converge faiblement vers 0.

b) La suite u_n converge-t-elle fortement ?

4.10 On définit sur $C([0,1])$ la forme linéaire

$$\Lambda u = \int_0^{1/2} u(x)\,dx - \int_{1/2}^1 u(x)\,dx.$$

On note B la boule unité de $C([0,1])$.

a) Montrer que $\Lambda \in C([0,1])'$.

b) Montrer que $\|\Lambda\| = 1$.

c) Montrer qu'il n'existe pas $u \in C([0,1])$ de norme 1 tel que $|\Lambda(u)| = 1$.

d) Conclure que $C([0,1])$ n'est pas réflexif.

4.11 Dualité dans les espaces ℓ^p.
On garde les notations de l'exercice 1.25. On définit sur $\ell^p \times \ell^q$ ($1 \le p \le \infty$, q exposant conjugué de p, i.e. tel que $p^{-1} + q^{-1} = 1$) la forme bilinéaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n.$$

a) On va montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ s'identifie canoniquement au dual de $c_0(\mathbb{N})$ par l'application $\Phi : x \mapsto \langle x, \cdot\rangle$.

   i) Montrer que Φ définit une application linéaire isométrique de ℓ^1 dans $(c_0)'$.

   ii) Montrer que Φ est un isomorphisme.

b) Montrer de façon analogue que le dual de ℓ^p ($1 \le p < \infty$) s'identifie canoniquement à ℓ^q avec q exposant conjugué de p ($p^{-1} + q^{-1} = 1$).

c) Montrer que l'application $x \mapsto \langle x, \cdot\rangle$ de ℓ^1 dans $(\ell^\infty)'$ n'est pas surjective. [On construira une forme linéaire continue sur ℓ^∞ nulle sur c_0, non identiquement nulle.]

d) i) Montrer que les espaces ℓ^p sont réflexifs pour $1 < p < \infty$.

   ii) Montrer que les espaces c_0, ℓ^1, ℓ^∞ ne sont pas réflexifs.

4.12 Convergence faible dans les espaces ℓ^p

a) Construire dans l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$, une suite convergeant faiblement, ne convergeant pas fortement.

b) Construire une suite convergeant $*$-faiblement dans $\ell^1(\mathbb{N})$, ne convergeant pas fortement.

c) On va montrer que toute suite de ℓ^1 convergeant faiblement converge fortement (théorème de Schur).

i) Montrer qu'il suffit de vérifier qu'il n'existe pas de $\varepsilon > 0$ ni de suite (y^k) convergeant faiblement vers 0 dans ℓ^1 telle que $\|y^k\|_{\ell^1} \geq 3\varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

ii) On suppose dorénavant qu'une telle suite existe et on va construire $x \in \ell^\infty$ et une sous-suite (y^{k_i}) telle que $\langle x, y^{k_i} \rangle > \varepsilon$. Pourquoi cela donnera-t-il bien la contradiction souhaitée ?

iii) Soit n_0 telle que $\sum_{n_0+1}^{\infty} |y_n^0| < \varepsilon$. Construire $x_0, \ldots, x_{n_0}$ de module ≤ 1 tels que $\sum_0^{n_0} x_n y_n^0 > 2\varepsilon$. Montrer que, pour tout $x \in \ell^\infty$ de norme ≤ 1 dont les n_0 premières coordonnées ci-dessus, on a $\langle x, y^0 \rangle > \varepsilon$.

iv) Montrer qu'il existe $k_1 > 0$ tel que, pour tout $k \geq k_1$, on a $\sum_0^{n_0} x_n y_n^k < \varepsilon$.

v) Trouver $n_1 > n_0$ et construire $x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_1}$ de module ≤ 1 tel que tout $x \in \ell^\infty$ de norme ≤ 1 dont les n_1 premières coordonnées ainsi définies vérifie $\langle x, y^{k_1} \rangle > \varepsilon$.

vi) Achever la construction de x.

d) Qu'en conclut-on sur les topologies forte, faible et $*$-faible de ℓ^1 ?

4.13 On note B la boule unité fermée de c_0.

a) Construire une suite de B n'admettant pas de sous-suite convergeant faiblement.

b) Construire une forme linéaire continue sur c_0 qui n'atteint pas son maximum sur B.

4.14 Théorème de Mazur

Soient E un espace de Banach et (x_n) une suite de E convergeant faiblement vers x. On veut montrer qu'il existe une combinaison convexe des (x_n) convergeant fortement vers x.

a) On pose $K_n = \overline{\mathrm{conv}}\{x_k \mid k \geq n\}$. Montrer que $x \in K_n$ pour tout n.

b) En déduire qu'il existe une suite de combinaisons convexes de la forme $y_n = \sum_{k \geq n} \lambda_k^n x_k$ (λ_k^n nulle pour $k \geq k_n$, ≥ 0 et $\sum_{k \geq n} \lambda_k^n = 1$) qui converge fortement vers x. [Utiliser l'exercice 2.11.]

5. Topologies faibles : bonus track

5.1 Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie

a) Montrer que la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E ne coïncide jamais avec la topologie forte (montrer que tout ouvert pour la topologie faible contient une droite).

b) Soit $S = \{x,\ x \in E,\ \|x\| = 1\}$. Prouver que l'adhérence de S pour la topologie faible coïncide avec la boule unité –fermé– $\{x,\ x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$.

c) Montrer que l'intérieur de la boule unité $B = \{x,\ x \in E,\ \|x\| < 1\}$ pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ est vide.

d) Montrer que toute partie compacte de E pour la topologie forte est également compacte pour la topologie faible.

5.2 Soit E un espace de Banach et soit $K = \{e', e' \in E', \|e'\| \leq 1\}$ muni de la topologie induite par la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$. Montrer qu'il existe une injection isométrique de E dans $\mathscr{C}(K)$, où $\mathscr{C}(K)$ est l'espace des fonctions continues sur K, à valeurs réelles, muni de la norme usuelle, $\|\varphi\| = \sup_{e' \in K} |\varphi(e')|$, $\varphi \in \mathscr{C}(K)$.

5.3 Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T une application linéaire de E dans F.

a) Montrer que les trois assertions sont équivalentes
   (i) T est continue de E muni de la topologie de la norme dans F muni de la topologie de la norme
   (ii) T est continue de E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$ dans F muni de la topologie faible $\sigma(F, F')$
   (iii) T est continue de E muni de la topologie forte dans F muni de la topologie faible $\sigma(F, F')$

b) Montrer que si T est continue de E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$ dans F muni de la topologie forte alors $\dim(\mathrm{Im}(T(E))) < +\infty$.

5.4 Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. On suppose que T transforme toute suite fortement convergente en une suite faiblement convergente. Démontrer que T est continue (au sens des topologie fortes).

5.5 Soit E un espace de Banach et soit $A : E \mapsto E'$ une application monotone, i.e. A vérifie

$$< Ax, >_{E',E} \geq 0, \quad \forall x \in E.$$

On suppose que pour tout x, y dans E l'application

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto < A(x + ty), y >_{E',E}$$

est continue en $t = 0$.
Montrer que A est continue de E fort dans E' muni de la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$.

5.6 Extrait de l'examen 2008

Soit E un espace de Banach séparable et $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de E. On note E' l'espace dual de E et $B_{E'}(0,1)$ la boule unité de E'.

On définit l'application d de $B_{E'}(0,1) \times B_{E'}(0,1)$ dans $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall T, S \in E' \quad d(T,S) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \min\big(1, |T(x_n) - S(x_n)|\big).$$

a) Démontrer que d est bien définie et qu'elle définit une distance sur $B_{E'}(0,1)$.

b) Soient (T_p) une suite d'éléments de $B_{E'}(0,1)$ et T un élément de $B_{E'}(0,1)$. Démontrer l'implication suivante

$$\lim_{p\to+\infty} d(T_p, T) = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{p\to+\infty} T_p(x_n) = T(x_n).$$

c) Déduire de la question précédente, l'implication suivante :

$$\lim_{p\to+\infty} d(T_p, T) = 0 \implies \forall x \in E,\ \lim_{p\to+\infty} T_p(x) = T(x). \tag{1}$$

d) On suppose que $\forall x \in E$, $\lim_{p\to+\infty} T_p(x) = T(x)$. Soient $1 > \varepsilon > 0$ fixé et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-(n_0-1)} < \varepsilon/2$. Démontrer qu'il existe un entier $P(n_0)$ (qui dépend donc de n_0) tel que $d(T_p, T) < \varepsilon$ pour $p \geq P(n_0)$. [on pourra couper $\sum_{n=0}^{+\infty}$ en $\sum_{n=0}^{n_0} + \sum_{n=n_0}^{+\infty}$ dans la définition de d et utiliser l'hypothèse de cette question]

En déduire que la réciproque de l'implication (1) est vraie.

e) Déduire de ce qui précède que $B_{E'}(0,1)$ muni de la distance d est un espace métrique compact. [utiliser la séparabilité de E et un théorème du cours]

5.7 Soit E un espace de Banach séparable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E'. Montrer directement, sans faire appel aux propriétés de la topologie faible-$*\sigma(E',E)$ qu'il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E',E)$. [on pourra utiliser le procédé d'extraction diagonale et la fait que E est séparable]

5.8 Soit E un espace de Banach

a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. On suppose que pour tout $x \in E$, $< f_n, x >_{E',E}$ converge vers une limite.

Montrer qu'il existe $f \in E'$ tel que $f_n \rightharpoonup f$ pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E',E)$.

b) On suppose maintenant que E est réflexif. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que pour tout $f \in E'$, $< f, x_n >_{E',E}$ converge vers une limite.

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

c) Construire un exemple d'espace E non réflexif où la conclusion de b) tombe en défaut. [prendre $E = c_0$ et l'élement x_n dont les termes sont 1 jusqu'au rang n puis 0]

5.9 Soit E un espace de Banach de dimension infinie vérifiant l'une des hypothèses suivantes

- E' est séparable
- E est réflexif

Montrer qu'il existe une suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \rightharpoonup 0$ pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

5.10 Soit E un espace de Banach uniformément convexe.

a) Montrer que pour tout $M > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\frac{x+y}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \delta$$

pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ et $\|x-y\| > \varepsilon$. [on pourra raisonner par l'absurde]

b) Même question si l'on remplace $\| \ \|^2$ par $\| \ \|^p$ avec $1 < p < +\infty$.

5.11 Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\alpha \in]0, 1/2[$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|tx + (1-t)y\| \leq 1 - \delta$$

pour tout $t \in [\alpha, 1-\alpha]$, pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ et $\|x-y\| \geq \varepsilon$. [si $\alpha \leq t \leq \frac{1}{2}$ on pourra écrire $tx + (1-t)y = \frac{y+z}{2}$]