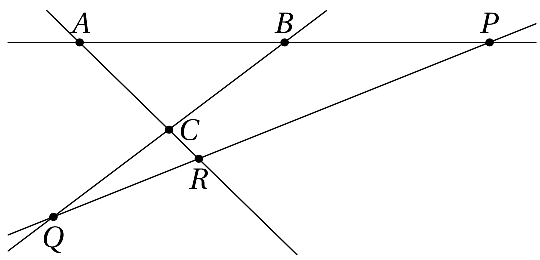
Université de Rouen
L3 Mathématiques
Année 2007-2008

Géométrie
Contrôle Continu N° 1 du 10 mars 2008, durée 1h55

L'USAGE DES CALCULATRICES, TÉLÉPHONES ET/OU ORDINATEURS PORTABLES, BALADEURS NUMÉRIQUES, ASSISTANTS PERSONNELS EST INTERDIT.
L'USAGE DE TOUT DOCUMENT N'EST PAS AUTORISÉ.

Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée. Une question non résolue n'empêche pas toujours de faire les suivantes : dans ce cas indiquez clairement que vous admettez le(s) résultat(s) de la question non faite. La « question super bonus » ne peut être traitée que si le reste du sujet est fait.

Exercice 1. Dans un plan affine quatre droites se coupent deux à deux selon la configuration ci-dessous.



On suppose que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{CB}$. Montrer que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CR}$.

Exercice 2. Soient X un espace affine réel et h_1, h_2 deux homothéties de centre respectif O_1, O_2 et de rapport respectif k_1, k_2, avec $k_1 \neq 0,1$ et $k_2 \neq 0,1$. D'une façon générale si f est une application affine de X dans X, on note $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire vectorielle associée.

(a) Que valent $\overrightarrow{h_1}$, $\overrightarrow{h_2}$ et $\overrightarrow{h_1 \circ h_2}$?

(b) Montrer que si $k_1 k_2 \neq 1$ alors $h_1 \circ h_2$ est une homothétie. Préciser son rapport et son centre en fonction de k_1, k_2, O_1 et O_2 [on exprimera ce centre sous forme d'un barycentre].

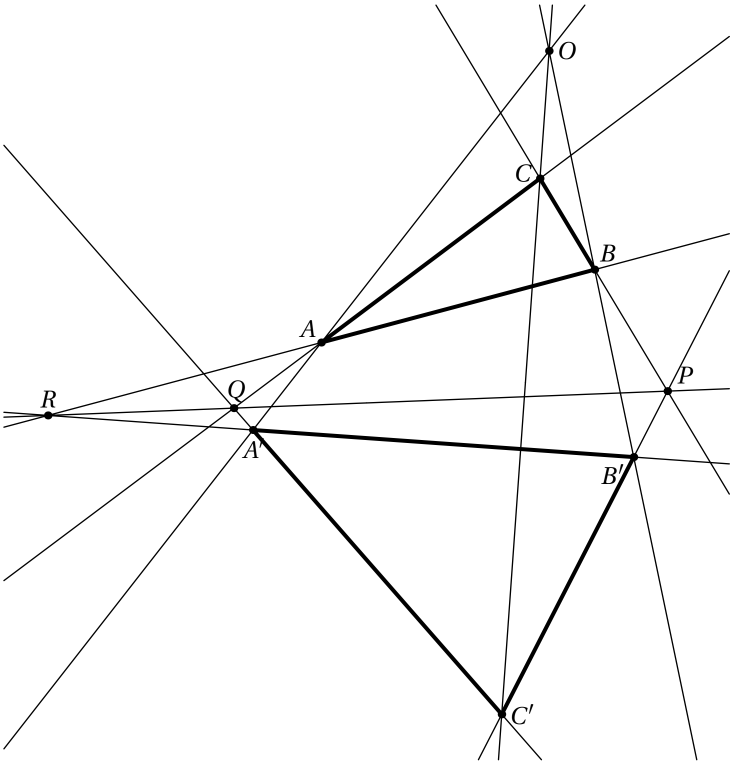
(c) Montrer que si $k_1 k_2 = 1$ alors $h_1 \circ h_2$ est une translation. Préciser le vecteur associé à cette translation, i.e. le vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que pour tout M dans X, $h_1 \circ h_2(M) = M + \overrightarrow{v}$.

(d) A-t-on $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$?

Exercice 3. (Desargues, nouvelle version) Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose que les deux triangles n'ont aucun sommet en commun. On suppose aussi que les droites AB, AC, BC coupent $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ en R, Q et P respectivement (on pourra s'aider de la figure ci-dessous).

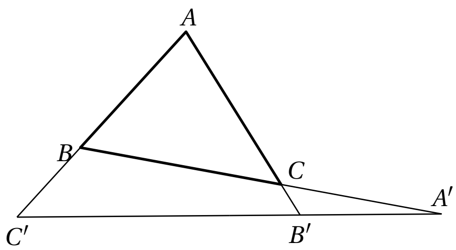
(a) Montrer que si les droites AA', BB' et CC' sont concourantes alors les points P, Q et R sont alignés. [*Indication : on pourra s'aider du théorème de Ménélaüs appliqué aux triangles BCO, CAO et ABO où O désigne le point d'intersection des droites AA', BB' et CC'*].

(b) Réciproquement montrer que si les points P, Q et R sont alignés alors les droites AA', BB' et CC' sont concourantes. [*Indication : appliquer le résultat précédent aux triangles AQA' et BPB'*]



Rappel. (Théorème de Ménélaüs) Soient ABC un triangle, A', B' et C' des points de ses côtés BC, CA et AB. On suppose qu'aucun des trois points A', B', C' ne coïncide avec un sommet du triangle ABC. Les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si on a

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \times \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \times \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1.$$



Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E. On définit $\varphi : E \times E \mapsto \mathbb{C}$ par

$$\varphi(x, y) = f(x)\overline{g(y)} + \overline{f(y)}g(x).$$

(a) Montrer que φ est une forme sesquilinéaire sur E.

On suppose désormais que $\dim(E) \geq 3$.

(b) Montrer que φ est dégénérée.

(c) En distinguant les 2 cas « la famille $\{f, g\}$ est libre » et « la famille $\{f, g\}$ est liée », déterminer $E^{\perp}$ (en fonction d'éléments caractéristiques de f et g tels que ker, Im, etc) et $\mathrm{rg}(\varphi)$.

(question super bonus) A-t-on

$$\varphi \text{ positive } \Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } f = \lambda g \text{ et } \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0\right)?$$

Université de Rouen
L3 Mathématiques
Année 2007-2008

Géométrie
Contrôle Continu N° 1, correction

Exercice 1. Il y a au moins trois façons de procéder. Dans les deux cas il faut définir le point R.
Solution 1. D'après l'énoncé, B est le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(P,1)$ et C est le barycentre des points pondérés $(B,1)$, $(Q,1)$ (attention ici on travaille avec la notion vue en T.D.). Par associativité des barycentres, le point C est barycentre des points pondérés $(A,1/2)$, $(P,1/2)$, $(Q,1)$. Si M désigne le barycentre de $(P,1/2)$, $(Q,1)$ alors C est barycentre de $(A,1/2)$, $(M,3/2)$. Le point M est donc l'intersection des droites AC et Q, ainsi il coïncide avec R. On en déduit que $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CR}=0$, d'où la conclusion.
Solution 2. Prenons le repère affine $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Le point R est le point d'intersection des droites AC et PQ. Les droites AC et PQ ont respectivement pour équation $x=0$ et $2x+3y=4$. Ainsi dans le repère affine choisi le point R a pour coordonnées $(0,4/3)$. Comme C a pour coordonnées $(0,1)$, on conclut aisément.
Solution 3. On applique Ménélaüs au triangle ABC, les points Q, R et P étant alignés...

Exercice 2.

(a) D'après le cours et les T.D., $\overrightarrow{h_1}=k_1 Id$, $\overrightarrow{h_2}=k_2 Id$ et $\overrightarrow{h_1\circ h_2}=\overrightarrow{h_1}\circ\overrightarrow{h_2}=k_1k_2 Id$.

(b) Si $k_1k_2\neq 1$ alors $k_1k_2\neq 0,1$ et ainsi $h_1\circ h_2$ est une homothétie de rapport k_1k_2. Pour le centre il suffit de chercher l'unique point O vérifiant $h_1\circ h_2(O)=O$. On a successivement

$$h_1\circ h_2(O)=h_1\big(O_2+k_2\overrightarrow{O_2O}\big)=O_1+k_1\big(\overrightarrow{O_1O_2}+k_2\overrightarrow{O_2O}\big)=O_1+k_1\overrightarrow{O_1O_2}+k_1k_2\overrightarrow{O_2O}.$$

Le point O sera le centre de l'homothétie si et seulement si

$$O=O_1+k_1\overrightarrow{O_1O_2}+k_1k_2\overrightarrow{O_2O},$$

soit

$$\overrightarrow{O_1O}=k_1\overrightarrow{O_1O}+k_1k_2\overrightarrow{O_2O}.$$

Finalement le point O existe, est unique et vérifie

$$(k_1-1)\overrightarrow{OO_1}+k_1(k_2-1)\overrightarrow{OO_2}=0.$$

(c) Si $k_1k_2=1$ alors $\overrightarrow{h_1\circ h_2}=Id$ et ainsi $h_1\circ h_2$ est une translation. Pour déterminer le vecteur il suffit d'écrire successivement pour M un point de l'espace affine

$$h_1\circ h_2(M)=O_1+k_1\overrightarrow{O_1O_2}+k_1k_2\overrightarrow{O_2M}=O_1+k_1\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2M}=M+\big(k_1\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2O_1}\big).$$

On conclut que $h_1\circ h_2$ est la translation de vecteur $(k_1-1)\overrightarrow{O_1O_2}$.

(d) La réponse est non (en général). Il suffit de prendre le cas où h_1 est l'homothétie de centre O_1, de rapport $1/2$ et h_2 l'homothétie de centre O_2, de rapport 2. D'après la question (c) $h_1\circ h_2$ sera la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{O_1O_2}$ tandis que $h_2\circ h_1$ sera la translation de vecteur $\overrightarrow{O_2O_1}$. Dès que les points O_1 et O_2 sont distincts il est clair que $h_1\circ h_2\neq h_2\circ h_1$.

Exercice 3.

(a) On suppose que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes au point O. Appliquons le théorème de Ménélaüs au triangle BCO : les points C', B', P sont alignés –par définition le point P est sur la droite $B'C'$– appartiennent respectivement aux droites CO, BO, BC ; donc

$$\frac{\overrightarrow{C'O}}{\overrightarrow{C'C}}\times\frac{\overrightarrow{B'B}}{\overrightarrow{B'O}}\times\frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PB}}=1.$$

De la même façon, dans le triangle CAO les points C', A', Q des côtés CO, AO, AC respectifs sont alignés ; donc

$$\frac{\overrightarrow{C'O}}{\overrightarrow{C'C}}\times\frac{\overrightarrow{A'A}}{\overrightarrow{A'O}}\times\frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}}=1.$$

Il nous reste le triangle ABO :
$$\frac{\overrightarrow{B'O}}{\overrightarrow{B'B}} \times \frac{\overrightarrow{A'A}}{\overrightarrow{A'O}} \times \frac{\overrightarrow{RB}}{\overrightarrow{RA}} = 1.$$
Des trois égalités précédentes et après simplification évidente on obtient
$$\frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PB}} \times \frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{QC}} \times \frac{\overrightarrow{RB}}{\overrightarrow{RA}} = 1$$
et le théorème de Ménélaüs permet d'affirmer –les points P, Q, R appartenant respectivement aux côtés BC, AC, AB du triangle ABC– que P, Q et R sont alignés.

(b) Suivons l'indication et appliquons le résultat précédent aux triangles AQA' et BPB' : d'après l'hypothèse les droites AB, PQ et $A'B'$ sont concourantes en R ; donc le point C –intersection de QA et BP–, le point C' –intersection de QA' et PB'– et le point O –intersection de AA' et BB'– sont alignés. Ce qui revient à dire que les droites AA', CC' et BB' sont concourantes.

Exercice 4.

(a) c'est du cours

(b) Une condition suffisante d'appartenance à $E^{\perp}$ est $f(x) = g(x) = 0$. Donc $\ker(f) \cap \ker(g) \subset E^{\perp}$. Comme f et g sont deux formes linéaires non nulles, nous savons que $\dim\ker(f) = \dim\ker(g) = n-1$. Comme $n \geq 3$ les deux sous espaces vectoriels $\ker(f)$ et $\ker(g)$ ne peuvent être en sommes directe –car sinon $\ker(f) + \ker(g)$ serait de dimension $2n-2$, qui est strictement supérieur à n. Ainsi $\ker(g) \cap \ker(g)$ est un sous espace vectoriel de dimension supérieure à 1, donc φ est dégénérée.

(c) On démontre dans tous les cas que $E^{\perp} = \ker(f) \cap \ker(g)$.

Supposons que la famille $\{f, g\}$ est libre. Nécessairement on a $\ker(f) \neq \ker(g)$ et $\ker(f) + \ker(g) = E$. D'après les dimensions des noyaux des deux formes linéaires on en déduit que $\ker(f) \cap \ker(g)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$ et on a $\mathrm{rg}(\varphi) = n-2$.

Supposons que la famille $\{f, g\}$ est liée : soit λ un complexe non nul tel que $g = \lambda g$. La forme sesquilinéaire s'écrit alors $\varphi(x, y) = f(x)\overline{\lambda f(y)} + \lambda f(y)\overline{g(x)} = 2\mathrm{Re}\big(\bar{\lambda} f(x)\overline{f(y)}\big)$, ce qui permet de montrer que $E^{\perp} = \ker(f)$. Ainsi on obtient que $\mathrm{rg}(\varphi) = n-1$.