Université de Rouen
L3 Mathématiques
Année 2007-2008

Géométrie
Contrôle Continu N° 2 du 5 mai 2008, durée 1h30

L'USAGE DES CALCULATRICES, TÉLÉPHONES ET/OU ORDINATEURS PORTABLES, BALADEURS NUMÉRIQUES, ASSISTANTS PERSONNELS N'EST PAS AUTORISÉ.
L'USAGE DE TOUT DOCUMENT EST INTERDIT.

Exercice 1. Dans un espace affine réel quelconque E, soient h l'homothétie de centre O, de rapport k ($k \neq 0,1$) et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Reconnaître les applications suivantes

$$\varphi_1 = t \circ h \circ t, \quad \varphi_2 = h^{-1} \circ t \circ h, \quad \varphi_3 = t \circ h \circ t^{-1},$$

où t^{-1} et h^{-1} désignent respectivement les applications affines réciproques de t et h. Préciser, quand celles-ci sont des translations ou des homothéties, leur élément caractéristique –le vecteur quand c'est une translation, le centre et le rapport quand c'est une homothétie.

Exercice 2. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4.$$

(a) Effectuer la réduction en carrés avec la méthode de Gauss.

(b) Déterminer la signature de q et une base orthogonale pour q.

Exercice 3. Soit E le plan affine réel. On appelle symétrie par rapport à I, ou symétrie de centre I, l'homothétie de centre I et de rapport -1.

(a) Soient I, J, K trois points distincts de E et soient s_I, s_J, s_K les symétries par rapport à I, J, K respectivement.

-i- Montrer que l'application composée $s_J \circ s_I$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

-ii- Montrer que l'application composée $s_K \circ s_J \circ s_I$ est une symétrie par rapport à un point que l'on précisera en fonction de I, J et K.

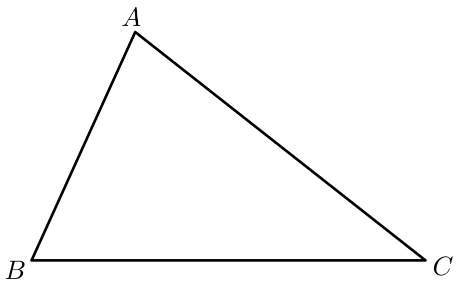
(b) Soient A, B, C trois points distincts du plan affine. On cherche à montrer qu'il existe A', B', C' tels que A soit milieu de $A'B'$, B milieu de $B'C'$, C milieu de $C'A'$ et que ces trois points sont déterminés de façon unique. On note s_A, s_B, s_C les symétries par rapport aux points A, B, C respectivement.

-i- Montrer que si A', B', C' existent alors $s_C \circ s_B \circ s_A(A') = A'$.

-ii- À l'aide des questions (a)-ii- et (b)-i- montrer l'existence et l'unicité des points A', B', C'.

-iii- Déterminer A' en fonction de A, B et C. Sur la figure donnée construire A' puis B' et C'.

(c) Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan affine. Montrer que ces quatre points distincts sont les milieux des quatre côtés d'un quadrilatère $A'B'C'D'$, si et seulement si ils sont les sommets d'un parallélogramme (théorème de Varignon) – A milieu de $A'B'$, B milieu de $B'C'$, C milieu de $C'D'$, D milieu de $D'A'$. On pourra introduire les symétries s_A, s_B, s_C, s_D de centres respectifs A, B, C, D, puis étudier l'application $s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A$ et enfin caractériser le point $s_D \circ s_C \circ s_B \circ s_A(A')$ dans le cas où un tel quadrilatère existe.


A
B
C