L'USAGE DES CALCULATRICES, TÉLÉPHONES ET/OU ORDINATEURS PORTABLES, BALADEURS NUMÉRIQUES, ASSISTANTS PERSONNELS EST AUTORISÉ.
L'USAGE DE TOUT DOCUMENT N'EST PAS INTERDIT.

Exercice 1. Dans un espace affine réel quelconque E, soient h_1 l'homothétie de centre O_1, de rapport k_1 et h_2 l'homothétie de centre O_2, de rapport k_2 ($k_1, k_2 \notin \{0,1\}$). Soient t_1 une translation de vecteur $\overrightarrow{u_1}$ et t_2 une translation de vecteur $\overrightarrow{u_2}$. Pour les quatre applications affines suivantes

$$h_1 \circ t_1, \quad t_1 \circ h_1, \quad h_1 \circ t_1 \circ h_2 \quad \text{et} \quad t_1 \circ h_1 \circ t_2,$$

déterminer si celles-ci sont des translations ou des homothéties et préciser alors leur élément caractéristique –le vecteur quand c'est une translation, le centre et le rapport quand c'est une homothétie.

Exercice 2. (Pappus nouvelle version) Soient trois points A, C, E situés sur une droite, et trois autres points B, D, F situés sur une autre droite. On suppose que les droites AB, CD et EF forment le triangle UVW –AB, CD, EF coupent EF, AB, CD, en V, W et U, aucune de ces 3 droites n'est parallèle à une des 2 autres, voir les figures 1 et 2 pour deux configurations.

Montrer que si les droites AB, CD, EF coupent DE, FA, BC, en L, M et N, respectivement, ces trois points sont alignés (voir figures 1 et 2).

[indication : faire un dessin et appliquer 5 voire 6 fois le théorème Ménélaüs à des points alignés et situés sur le triangle UVW !]

Exercice 3. Application de Pappus Soient C et F des points situés respectivement sur les côtés AE et BD d'un parallélogramme $AEBD$; et soient M et N les points où se coupent respectivement, d'une part les droites CD et FA, d'autre part les droites EF et BC. On désigne par P le point où se coupent MN et DA, et par Q le point où se coupent MN et EB. Montrer que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QB}$.

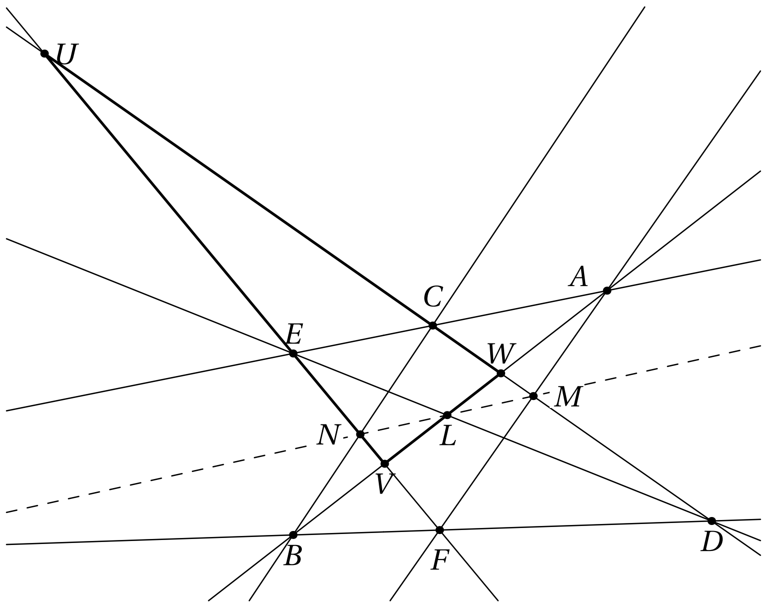

FIGURE 1. Exercice 2, Pappus, une configuration

Exercice 4. Dans un espace affine réel E, on appelle symétrie par rapport à I, ou symétrie de centre I, l'homothétie de centre I et de rapport -1.

(a) Soient I et J deux points de E et soient s_I et s_j les symétries par rapport à I et J. Démontrer que l'application composée $s_J \circ s_I$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

(b) Soient n points distincts $A_1, \dots, A_n$ dans E. On demande de trouver n points $M_1, \dots, M_n$ de sorte que A_1 soit le milieu du segment M_1M_2, A_2 le milieu du segment $M_2M_3, \dots$, A_n le milieu du segment M_nM_1.

-i- Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ on note $s_i = s_{A_i}$. Caractériser, selon la parité de n et en fonction des points $A_1, \dots, A_n$ l'application affine $s_n \circ \cdots \circ s_1$.

-ii- Montrer que si les points $M_1, \dots, M_n$ existent alors $s_n \circ \cdots s_1(M_1) = M_1$.

-iii- Montrer que si n est impair alors il existe une unique solution au problème et déterminer cette solution, en particulier le point M_1.

-iv- Montrer que si n est pair alors il existe une solution si et seulement si

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = 0$$

et que dans ce cas le point M_1 peut être choisi arbitrairement.

(c) Montrer que pour que quatre points distincts soient les milieux des quatre côtés d'un quadrilatère, il faut et il suffit qu'ils soient les sommets d'un parallélogramme (théorème de Varignon) ; en particulier dans un espace affine de dimension supérieure à trois il faut qu'ils soient coplanaires.

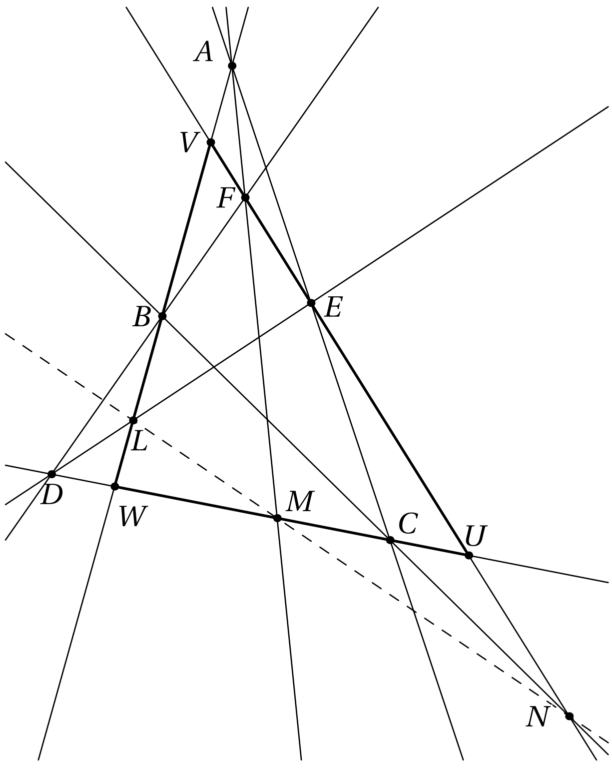

FIGURE 2. Exercice 2, Pappus, une autre configuration