Exercice 1.1. Soient X un ensemble non vide et $\mathscr{B}(X)$ l'ensemble des bijections de X sur lui-même. Montrer que $\mathscr{B}(X)$ est un groupe.

Exercice 1.2. Montrer que la définition 1 et la définition 2 d'espace affine données dans le cours sont équivalentes.

Exercice 1.3. (Structure affine d'un espace vectoriel)

Soit T un espace vectoriel. On pose $\Phi(t,x) = t + x (t \in T, x \in T)$. Montrer que (T,T,Φ) est un espace affine.

Exercice 1.4. (Structure affine d'un hyperplan d'un espace vectoriel ne passant pas par l'origine)

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $f : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle sur E. On pose

$$\overrightarrow{X} = f^{-1}(0);\ X = f^{-1}(1);\ \Phi(t,x) = t + x \text{ pour } t \in \overrightarrow{X}, x \in X.$$

Montrer que $(X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ est un espace affine

Exercice 1.5. Soient $(X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ et $(X', \overrightarrow{X}', \Phi')$ deux espaces affines. Soit $\widetilde{\Phi} = \Phi \times \Phi'$ l'application de $(\overrightarrow{X} \times \overrightarrow{X}') \times (X \times X')$ dans $(X \times X')$ définie par

$$\widetilde{\Phi}[(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{t'}), (x, x')] = [\Phi(\overrightarrow{t}, x), \Phi'(\overrightarrow{t'}, x')].$$

Montrer que $(X \times X', \overrightarrow{X} \times \overrightarrow{X}', \widetilde{\Phi})$ est un espace affine (appelé espace produit).

Exercice 1.6. Soient $(X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ un espace affine et S un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{X}$.

Montrer que la relation $R(x,x')$ définie par $\overrightarrow{xx'} \in S$ est une relation d'équivalence dans X.

Montrer qu'on peut définir l'application quotient de Φ

$$\widehat{\Phi} : (\overrightarrow{X}/S) \times (X/R) \to (X/R).$$

Montrer que $(X/R, \overrightarrow{X}/S, \widehat{\Phi})$ est un espace affine (appelé espace affine quotient de X par S).

Exercice 1.7. Règle du parallélogramme. Soient X un espace affine et $a, b, a', b' \in X$ Montrer que

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'} \Longleftrightarrow \overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}.$$

Exercice 1.8. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, i.e. si $AA'B'B$ est un parallélogramme et si M vérifie $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AM}$ alors M vérifie aussi $\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'M}$.

Exercice 1.9. Soit X un espace vectoriel muni de sa structure affine (voir exercice 1.3) ; soit $a \in X$. Si $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$, calculer $x + y, \lambda x$ au sens de X_a en fonction de l'addition et la multiplication scalaire dans X. Comparer les espaces vectoriel X, X_0.

Exercice 1.10. Soient A un sous espace affine de $(X, \overrightarrow{X}, \Phi)$ et B un sous espace affine de $(A, \overrightarrow{A}, \Phi|_{\overrightarrow{A} \times A})$. Montrer que B est un sous espace affine de $(X, \overrightarrow{X}, \Phi)$.

Exercice 1.11. Soient X un espace affine et A une partie non vide de X. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est un espace affine de X,
2) Pour tout $a \in A, A$ est un sous espace vectoriel de X_a,
3) Il existe $a \in A$ tel que A soit un sous espace vectoriel de X_a.

Exercice 1.12. Montrer que A est un sous espace affine de X si et seulement si, il existe un sous espace vectoriel $\overrightarrow{V} \subset \overrightarrow{X}$ et un point $x \in X$ tels que :

$$A = x + \overrightarrow{V} = \{y \in X; \exists \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V}, y = x + \overrightarrow{v}\}.$$

Exercice 1.13. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous espaces affines de X. Montrer que $\cap_{i\in I}A_i$ est soit vide, soit un espace affine de X, de direction $\cap_{i\in I}\overrightarrow{A}_i$.

Soit Y une partie non vide de X, montrer l'existence de l'espace affine $V(Y)$ engendré par Y.

Exercice 1.14. 1) Montrer qu'un point d'un espace affine est un sous espace affine de dimension 0.

2) Montrer qu'une droite affine de $\mathbb{R}^n$ est un sous espace affine de dimension 1.

3) Montrer qu'un plan affine de $\mathbb{R}^3$ est un sous espace affine de dimension 2.

Exercice 1.15. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que par deux points distincts passe une droite et une seule. Par trois points non alignés passe un plan et un seul.

Exercice 1.16. Montrer que le parallélisme est une relation d'équivalence.

Exercice 1.17. Soient A et B deux sous espaces affines de X.

Montrer

$$A//B \Longleftrightarrow \exists \overrightarrow{\xi} \in \overrightarrow{X}, T_{\overrightarrow{\xi}}(A) = B.$$

Montrer que l'ensemble des $\overrightarrow{\xi} \in \overrightarrow{X}$ tels que $T_{\overrightarrow{\xi}}(A) = B$ est un sous espace affine de $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}, +)$ de direction $\overrightarrow{A}$.

[On note $T_{\overrightarrow{\xi}}$ l'élément $\varphi(\overrightarrow{\xi})$ de $\mathscr{B}(X)$.]

Exercice 1.18. Soient A et B deux sous espaces affine de X, de dimension p et q respectivement ; soit $V(A\cup B)$, le sous espace affine qu'ils engendrent. Montrer que les deux cas suivants sont possibles :

1) $A\cap B = \emptyset$, on a alors $p+q-\dim(\overrightarrow{A}\cap\overrightarrow{B}) < \dim\overrightarrow{X}$. Dans ce cas, dim $V(A\cup B)$ = dim $(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})+1 = p+q+1-$ dim $(\overrightarrow{A}\cap\overrightarrow{B})$.

2) $A\cap B \neq \emptyset$, dans ce cas, $A\cap B$ est un sous espace affine de X, de direction $\overrightarrow{A}\cap\overrightarrow{B}$, et dim $V(A\cup B)$ = dim $(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}) = p+q-$ dim $(\overrightarrow{A}\cap\overrightarrow{B})$.

Exercice 1.19. Pour que deux droites du plan soient parallèles, il faut et suffit que leur intersection soit vide. Qu'en est-il en dimension plus grande ?

Exercice 1.20. Montrer que les applications constantes $\forall x\in X, f(x) = a \in X'$ sont affines, determiner $\overrightarrow{f}$.

Exercice 1.21. On dit que $f : X \to X$ est une translation, si pour certain $\overrightarrow{\xi} \in \overrightarrow{X}$, on a $f = \varphi(\overrightarrow{\xi}) : x \longmapsto x + \overrightarrow{\xi}$. Montrer que les translations sont affines, et déterminer $\overrightarrow{f}$.

Exercice 1.22. On dit que $f : X \to X$ est une homothétie, si son application linéaire associée est kId $(k \neq 0,1)$. Montrer qu'une homothétie admet un point fixe unique a, et f est une homothétie de l'espace vectoriel X_a, et réciproquement.

Exercice 1.23. 1) Montrer que $\pi\circ\pi = \pi$,

2) Réciproquement, soit $f \in \mathscr{A}(X,X)$ vérifiant $f\circ f = f$. Montrer que c'est une projection parallèle.

Exercice 1.24. Soient $\rho \in \mathscr{L}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}')$ et $a' \in X'$. Montrer que $f : x \longmapsto a' + \rho(\overrightarrow{ax})$ est affine, et déterminer $\overrightarrow{f}$.

Exercice 1.25. Montrer que les projections $P_j : X_1 \times X_2 \to X_j$ sont affines, où $X_1\times X_2$ est l'espace afine produit défini dans l'exercice 1.5. Déterminer les applications linéaires associées.

Exercice 1.26. Soit E un ensemble, X un espace affine, X^E l'ensemble de toutes les applications de E dans X. Montrer que X^E a une structure d'espace affine déduite naturellement de celle de X, et que si E est affine, $\mathscr{A}(E,X)$ est un sous espace affine de X^E.

Exercice 1.27. Soit X un espace affine, S un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{X}$, X/S l'espace affine quotient défini dans l'exercice 1.6, π l'application canonique $X \to X/S$. Montrer que π est affine. Quelle est l'application linéaire associée ?

Exercice 1.28. Soit X un espace affine et a, b (resp. a, b, c) deux points distincts (resp. trois points non alignés). Montrer que l'ensemble des barycentres des points a et b (resp. a, b, c) est la droite (resp. le plan) qu'ils engendrent.

Exercice 1.29. Soient X un espace affine, I un ensemble fini d'indices. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1) La famille $(x_i)_{i\in I}$ de points de X est affinement libre,
2) $\forall i \in I$, la famille $(\overrightarrow{x_i x_j})_{j\in I-\{i\}}$ d'éléments de $\overrightarrow{X}$ est linéairement indépendante,
3) Il existe $i \in I$, tel que la famille $(\overrightarrow{x_i x_j})_{j\in I-\{i\}}$ d'éléments de $\overrightarrow{X}$ soit linéairement indépendante.

Exercice 1.30. Au repère cartésien $(x_0, \overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ est associé le repère affine $(x_0, x_0 + \overrightarrow{e_1}, \cdots, x_0 + \overrightarrow{e_n})$, appelons "Associés" ces deux repères. Exprimer alors $\mathscr{M}(f)$ en fonction de $\mathscr{M}_0(f)$ quand on passe des repères affines aux repères cartésiens associés, et réciproquement. Montrer que $\mathscr{M}(f)$ et $\mathscr{M}_0(f)$ sont semblables.

Exercice 1.31. Écrire l'application affine la plus générale de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$. Donner des conditions ncéssaires et suffisantes pour qu'elle soit injective, surjective, bijective.

Exercice 1.32. Montrer que les valeurs propres de $\mathscr{M}_0(f)$ sont $+1$ et celles de $\overrightarrow{f}$. Que peut-on dire des vecteurs propres correspondants ?

Exercice 1.33. Soit $(x_0, \cdots, x_n)$ un repère affine de X. Soient $y_1, \cdots, y_p$, p points de X, et $(\lambda_{ij})_{0\le j\le n}$ les coordonnées barycentriques de y_i dans ce repère. Montrer que pour que le sous espace affine engendré par $(y_1, \cdots, y_p)$ soit de dimension r, il faut et suffit que la matrice $((\lambda_{ij}))$ soit de rang $r+1$.

Exercice 1.34. Traiter un exercice analogue à l'exercice 1.33 en remplaçant repère affine et coordonnées barycentriques par repère cartésien et coordonnées cartésiennes.

Exercice 1.35. Déterminer les équations paramétriques des sous espaces affines de $\mathbb{R}^3$ engendrés par les points de coordonnées cartésiennes :

a) $(1,2,3)$ et $(-1,3,1)$;
b) $(1,2,3), (-1,3,1), (7,-1,9)$;
c) $(1,2,3), (-1,3,1), (3,1,5)$;
d) $(1,2,3), (-1,3,1), (3,1,5), (0,5,6)$;
e) $(1,2,3), (-1,3,1), (3,1,5), (5,0,6)$;

et déterminer leur dimension.

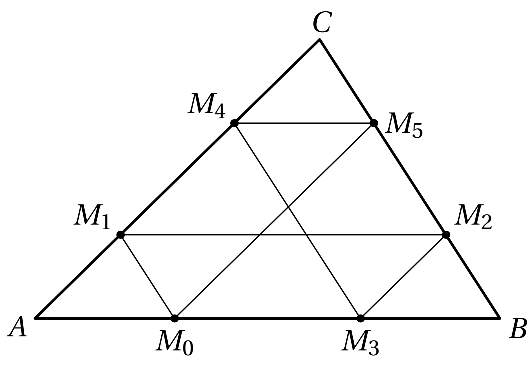

FIGURE 1. Exercice 1.37

Exercice 1.36. Déterminer les équations paramétriques des sous espaces affines de $\mathbb{R}^3$ parallèles à ceux définis dans l'exercice 1.35 et passant par l'un des 4 points de coordonnées :

1) $(9,-2,11)$;
2) $(9,-2,0)$;

3) $(4,-2,6)$;
d) $(4,-2,0)$.

Exercice 1.37. Soit ABC un triangle. Soit M_0 un point du côté AB. La parallèle à BC issue de M_0 coupe AC en M_1. La parallèle à AB issue de M_1 coupe BC en M_2, etc (voir Figure 1). On définit ainsi de suite les points M_i ($i \geq 0$). Montrer que $M_6 = M_0$.

Exercice 1.38. (Associativité du barycentre) Dans un espace affine quelconque soient $(A_1,\alpha_1),\dots,$ (A_p,α_p) des points pondérés tels que $\alpha_1+\cdots+\alpha_p \neq 0$, et soit G leur barycentre. Soit q un entier inférieur à p tel que $\alpha_1+\cdots+\alpha_q \neq 0$ et soit G' le barycentre de $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_q,\alpha_q)$. Montrer que G est le barycentre de $(G',\alpha_1+\cdots+\alpha_q)$, $(A_{q+1},\alpha_{q+1}),\dots,(A_p,\alpha_p)$.

Exercice 1.39. (Application de l'exercice 1.38) Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes en G le centre de gravité du triangle.

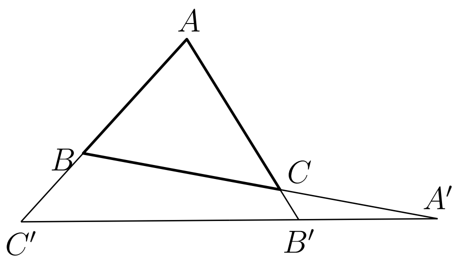

FIGURE 2. Ménélaüs, une configuration

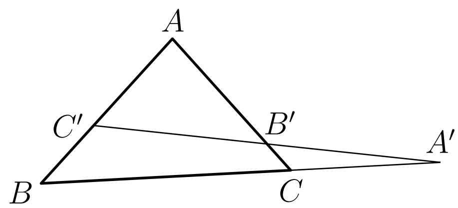

FIGURE 3. Ménélaüs, une autre configuration

Exercice 1.40. (Encore des barycentres) Soient (A,B,C) trois points non alignés du plan affine réel $\mathscr{E}$ et (α,β,γ) trois réels distincts de -1 et 0. On note A', B', C' les barycentres respectifs $\big((B,1),(C,\gamma)\big)$, $\big((C,1),(A,\alpha)\big)$, $\big((A,1),(B,\beta)\big)$. À quelle condition liant α, β, γ les points A', B', C' sont-ils alignés ? En déduire que les points A', B', C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \times \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \times \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1 \qquad \text{(théorème de Ménélaüs)}$$

À quelles conditions liant α, β, γ les droites (AA'), (BB'), (CC') sont-elles concourantes, parallèles ? En déduire que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \times \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \times \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1 \qquad \text{(théorème de Céva)}$$

1. LES CLASSIQUES

Exercice 1.41. (souvenir de collège : Thalès de Milet) Soient d, d', d'' trois droites parallèles distinctes et $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ deux droites non parallèles à d. Soient $A_i = \mathscr{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathscr{D}_i \cap d'$ et $A''_i = \mathscr{D}_i \cap d''$. Montrer que (voir figure 4)

$$\frac{\overrightarrow{A_1A''_1}}{\overrightarrow{A_1A'_1}} = \frac{\overrightarrow{A_2A''_2}}{\overrightarrow{A_2A'_2}}.$$

Réciproquement montrer que si un point B de la droite $\mathscr{D}_1$ vérifie

$$\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1A'_1}} = \frac{\overrightarrow{A_2A''_2}}{\overrightarrow{A_2A'_2}}$$

alors B appartient à la droite d'' (et coïncide avec le point A''_2).

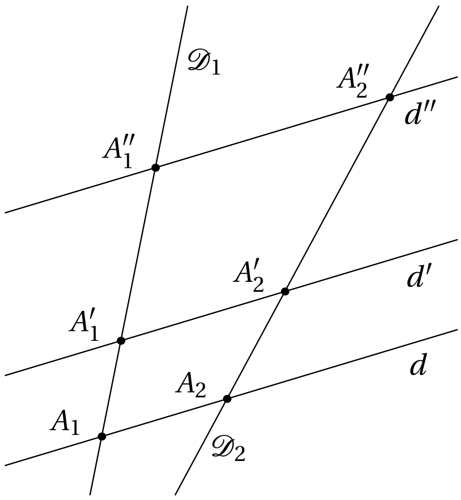

FIGURE 4. Exercice 1.41, Thalès

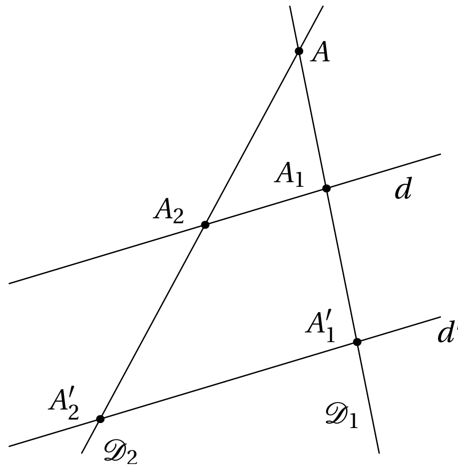

FIGURE 5. Exercice 1.41, Thalès

Application : Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites concourantes en A. Soient d et d' deux droites parallèles coupant $\mathscr{D}_1$ en A_1 et A'_1 respectivement et $\mathscr{D}_2$ en A_2 et A'_2. On suppose que les points A_i, A'_i sont distincts de A. Montrer que (voir figure 5)

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA'_1}} = \frac{\overrightarrow{AA_2}}{\overrightarrow{AA'_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A'_1A'_2}}.$$

[on pourra utiliser le théorème de Thalès et une homothétie de centre A qui envoie A_1 sur A'_1]

Exercice 1.42. (Ménélaüs d'Alexandrie) Soient ABC un triangle, A', B' et C' des points de ses côtés BC, CA et AB. Montrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si on a

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \times \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \times \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1.$$

L'exercice 1.40 propose une démonstration à l'aide des coordonnées barycentriques. Une autre façon de faire est d'utiliser les homothéties et leurs propriétés. Plus particulièrement on définit l'homothétie h_1 de centre C' qui transforme B en A et celle, notée h_2 de centre B' qui transforme A en C. Déterminer le rapport de chacune et utiliser leur composée. En anticipant ou en utilisant les connaissances de base du plan euclidien on peut aussi le démontrer en utilisant les hauteurs et le théorème de Thalès.

Exercice 1.43. (Pappus d'Alexandrie) Soient A, B, C trois points d'une droite $\mathscr{D}$ et A', B', C' trois points d'une droite $\mathscr{D}'$ distincte de $\mathscr{D}$. On suppose que AB' est parallèle à BA' et que BC' est parallèle à CB'. Montrer que AC' est parallèle à CA' (voir figure 6).

[indication : on distingue deux cas, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ parallèles ou non. On peut procéder en utilisant les coordonnées barycentriques. Une autre façon dans le cas où les deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent est d'utiliser le théorème de Thalès et dans l'autre cas les translations]

Exercice 1.44. (Giovanni Ceva) Soient ABC un triangle, A', B' et C' des points de ses côtés BC, CA et AB. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \times \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \times \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1$$

L'exercice 1.40 propose une démonstration à l'aide des coordonnées barycentriques. Une autre façon est d'utiliser Ménélaüs.

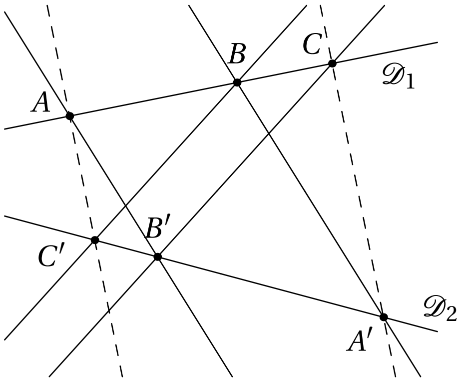

FIGURE 6. Exercice 1.43, Pappus

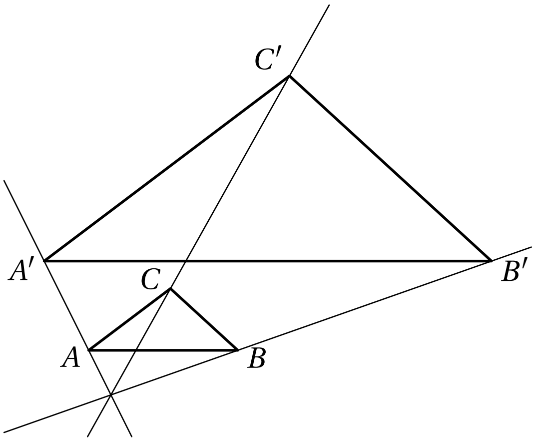

FIGURE 7. Exercice 1.45, Desargues

Exercice 1.45. (Girard Desargues) Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles (voir figure 7).

Il y a d'autres versions du théorème de Desargues. Pour cette version –la plus simple– on pourra s'aider du théorème de Thalès et/ou des translations.

Exercice 1.46. (Pappus nouvelle version) Soient trois points A, C, E situés sur une droite, et trois autres points B, D, F situés sur une autre droite. Si les droites AB, CD, EF coupent DE, FA, BC, en L, M et N, respectivement, ces trois points sont alignés (voir figures 8 et 9).

[indication : faire un dessin et appliquer 5 voire 6 fois le théorème Ménélaüs !]

Montrer que l'exercice 1.43 se déduit du résultat précédent.

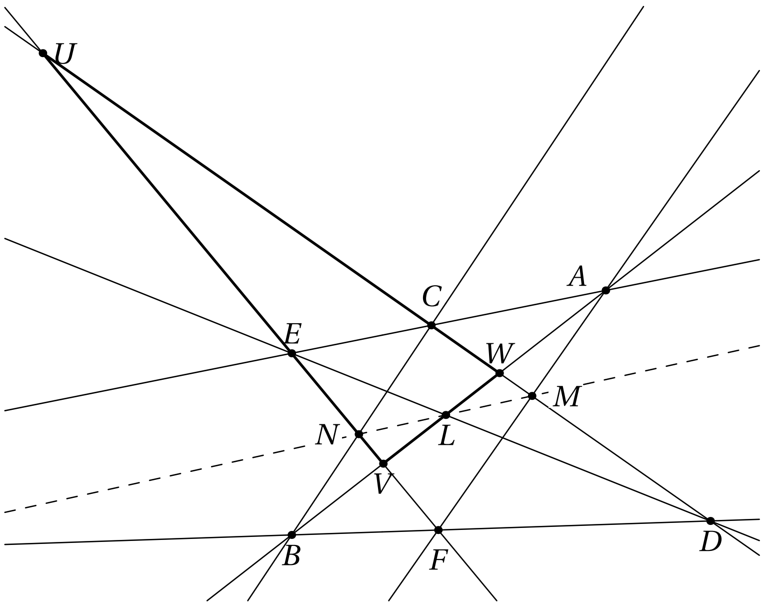

FIGURE 8. Exercice 1.46, Pappus, une configuration

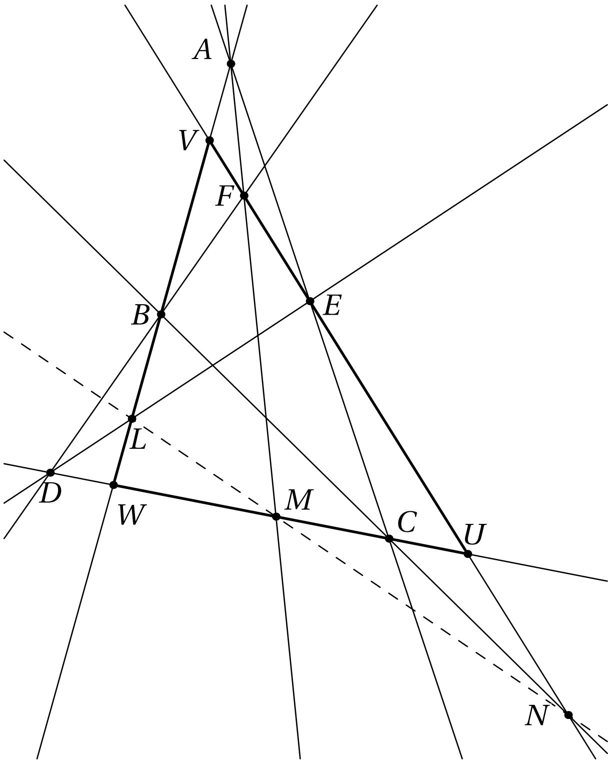

FIGURE 9. Exercice 1.46, Pappus, une autre configuration