Université de Rouen
L2 de Mathématiques - Informatiques
Année 2006-2007

Initiation à l'Analyse Numérique et Maple
Examen du 19 juin 2007, durée 3h

L'USAGE DE LA CALCULATRICE EST AUTORISÉ. L'USAGE DE TOUT DOCUMENT EST INTERDIT.

Exercice 1.

(a) Donner l'algorithme de la méthode de Dichotomie. Illustrer cette méthode par un dessin avec 2 itérations.

(b) Écrire un programme Maple, `dicho(f,a,b,eps)`, où `f` est la fonction f, `a` et `b` sont respectivement les valeurs d'initialisation a_0 et b_0 (avec $a_0 < b_0$) et où `eps` est le paramètre de précision ε (avec $\varepsilon > 0$). Cette procédure devra
- tester la validité de la dichotomie avec l'initialisation donnée a_0 et b_0.
- retourner la quantité $(a_n + b_n)/2$ où n est la première occurence telle que $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

(c) Soit $f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$. Soient $a_0 < 1$ et $b_0 > 3$ tels que le procédé de la dichotomie ne tombe jamais sur l'un des trois zéros de f, i.e. 1, 2 ou 3. Vers lequel de ces trois zéros la méthode de dichotomie ne peut converger ? [justifier avec soin votre réponse]

Exercice 2. Soit f une fonction polynomiale de dergré n.

(a) Soient $x_0, \ldots, x_{n+1}$ $n+2$ points distincts. Montrer que $f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = 0$.

(b) Soient $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ points disctincts. Montrer que la quantité $f[x_0, \ldots, x_n]$ est indépendante du choix des points d'interpolation.

[Indication : il n'y a aucun calcul à faire, il suffira de bien remarquer que l'on cherche le polynôme d'interpolation d'un polynôme !]

Exercice 3. Soient a et b deux paramètres réels. On définit la matrice $A(a,b)$ par

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & b \\ a & 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a,b) pour que la matrice $A(a,b)$ admette une décomposition LU.

(b) On prend $a = 1$ et $b = 2$ et on pose $A = A(a,b)$.

-i- Donner la décomposition LU de la matrice A. [on donnera toutes les étapes du processus de décomposition.]

-ii- A l'aide de la décomposition LU exprimer en fonction du paramètre s ($s \in \mathbb{R}$) la solution du système linéaire

$$Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+s \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Pour f suffisamment régulière on désire approcher $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ par la formule de quadrature

$$J(f) = af\Big(\frac{-2}{3}\Big) + bf(0) + cf\Big(\frac{2}{3}\Big),$$

où les quantités a, b et c sont à déterminer.

(a) Déterminer a, b et c pour que la formule J soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

(b) Déterminer le degré de précision de la formule de quadrature J.

(c) Le but de cette question est de donner une estimation de l'erreur. On suppose que f est $\mathscr{C}^4$. Soit p le polyôme d'interpolation de Lagrange de f en $x_0 = -1$, $x_1 = -2/3$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 2/3$. [surtout ne pas calculer p]

-i- Pour tout x dans $[-1,1]$ donner l'estimation de l'erreur $|f(x) - p(x)|$, en fonction de x et $\max_{y\in[-1,1} |f^{(4)}(y)|$.

-ii- Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ on a

$$\left|(x+1)\big(x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3}\big)x\right| \leq \frac{10}{9}.$$

-iii- Montrer que

$$|I(f) - J(f)| \leq \frac{5}{54} \max_{y\in[-1,1]} |f^{(4)}(y)|.$$

Exercice 5. On considère le tableau des différences divisées suivant

x	y			
-1	4			
		-3		
0	1		b	
		21		37
1	22		123	
		a		
2	289			

(a) Calculer les quantités a et b.

(b) Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole les 4 données y_i aux 4 points x_i.