Université de Rouen
L2 de Mathématiques - Informatiques
Année 2007-2008

Initiation à l'Analyse Numérique et Maple
Examen du 9 juin 2008, durée 3h

L'USAGE DE LA CALCULATRICE EST AUTORISÉ. L'USAGE DE TOUT DOCUMENT EST INTERDIT.

Exercice 1. Question de cours ou presque

(a) Décrire la méthode de Newton, faire un dessin pour l'interprétation graphique et donner le théorème qui permet d'affirmer que la méthode de Newton converge vers la racine désirée.

(b) Écrire un programme Maple qui effectue la méthode de Newton : `newton(f,df,x0,eps,Nmax)`, où `f` est la fonction f, `df` est la fonction f', `x0` est la donnée initiale, où `eps` est le paramètre de précision ε (avec $\varepsilon > 0$) et où `Nmax` est le nombre maximum d'itération. Cette procédure devra
- tester le fait $f'(x_n) \neq 0$ (sinon le programme s'arrête)
- retourner la quantité x_n où n est la première occurence telle que $|f(x_n| < \varepsilon$ ou $n \geq$ `Nmax`.

Exercice 2. Soit $a \geq 2$ un paramètre et soient A la matrice et b le vecteur définis par

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer $\det(A)$ en fonction de a. Montrer que si $a \geq 2$ alors A est inversible.

(b) Montrer que si $a \geq 2$ alors A admet une décomposition LU, telle que décrite dans le cours.

(c) On pose $a = 2$.

-i- Effectuer la décomposition LU de A.

-ii- Résoudre le système linéaire $Ax = b$.

Exercice 3. Pour toute fonction f continue sur l'intervalle $[-1,1]$ on définit

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \quad \text{et} \quad J(f) = c_0 f(-1) + c_1 f(x_1),$$

où x_1, c_0 et c_1 sont des constantes à déterminer. Le but est d'approcher $I(f)$ par la formule de quadrature $J(f)$.

(a) Déterminer x_1, c_0, c_1 tels que J soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

(b) Calculer $J(x^3)$ et $I(x^3)$. En déduire le degré de précision de la formule de quadrature J.

(c) Estimation de l'erreur. Soient f une fonction $\mathscr{C}^3([0,1])$ et p son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points -1, x_1 et 0 (surtout ne pas calculer p).

-i- Préciser le degré (maximum) de p et montrer que

$$I(p) = J(p) = J(f).$$

-ii- Donner le théorème du cours sur l'estimation de l'erreur $|p(x) - f(x)|$ pour tout $x \in [-1,1]$ et montrer que

$$\forall x \in [-1,1] \quad |p(x) - f(x)| \leq \frac{|x(1-x)|}{3} \max_{y \in [-1,1]} |f^3(y)|.$$

-iii- Calculer $\int_{-1}^{1} |x(1-x)| dx$.

-iv- A l'aide des questions -i-, -ii- et -iii- montrer que

$$|J(f) - I(f)| \leq \frac{1}{3} \sup_{y \in [-1,1]} |f^3(y)|.$$

Exercice 4. On désire approcher numériquement $7^{1/5}$. Pour cela on propose 3 méthodes itératives du type $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ avec x_0 bien choisi et φ une fonction donnée.

(a) Méthode notée (A) :

$$(A) \begin{cases} x_0 \text{ choisi,} \\ x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{avec} \quad g(x) = x - \dfrac{x^5 - 7}{x^2} \end{cases}$$

Vérifier que $g(7^{1/5}) = 7^{1/5}$ et calculer $g'(x)$. Cette méthode converge-t-elle vers $7^{1/5}$?

(b) Méthode notée (B) :

$$(B) \begin{cases} x_0 \text{ choisi,} \\ x_{n+1} = h(x_n) \quad \text{avec} \quad h(x) = x - \dfrac{x^5 - 7}{12} \end{cases}$$

Vérifier que $h(7^{1/5}) = 7^{1/5}$ et calculer $h'(x)$. Cette méthode converge-t-elle vers $7^{1/5}$?

(c) Méthode notée (C) :

$$(C) \begin{cases} x_0 \text{ choisi,} \\ x_{n+1} = k(x_n) \quad \text{avec} \quad k(x) = \dfrac{29}{30}x + \dfrac{7}{30x^4} \end{cases}$$

Vérifier que $k(7^{1/5}) = 7^{1/5}$ et calculer $k'(x)$. Cette méthode converge-t-elle vers $7^{1/5}$?

(d) On décide de choisir $x_0 = 1$ et la méthode (C). A l'aide de la calculatrice donner x_1, x_2, x_3 et x_4 avec 6 chiffres après la virgule.

(e) On pose $f(x) = x^5 - 7$. Définir la méthode de Newton associée à f. Donner un x_0 pour lequel un théorème du cours assure la convergence de la méthode de Newton. Pour ce x_0 choisi, calculer x_1, x_2, x_3 et x_4 avec 6 chiffres après la virgule.

(f) Les données expérimentales des questions (e) et (d) (vitesse de convergence) étaient-elles prévisibles ?