Université de Rouen
L2 de Mathématiques - Informatiques
Année 2006-2007

Initiation à l'Analyse Numérique et Maple
Examen du 12 septembre 2007, durée 2h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. L'usage de tout document est interdit.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = x\exp(x-1),$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x_0 \in]0,+\infty[\\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

(a) Montrer que 0 et 1 sont les seuls points fixes de f.

(b) Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$. Que peut-on en conclure ?

(c) On suppose que $x_0 \in]1,+\infty[$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

(d) On suppose que $x_0 \in [0,1]$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, préciser la limite et l'ordre de convergence suivant la valeur de x_0.

Exercice 2. Soient ε un élément de l'intervalle $]0,1[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$.

(a) Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange, noté P_ε, de la fonction f aux points 0, ε et 1.

(b) Donner la formule de l'erreur $\left|f(x) - P_\varepsilon(x)\right|$ pour x dans $[0,1]$.

(c) Montrer que pour tout x fixé dans $[0,1]$ on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon(x) = f(0) + xf'(0) + \big(f(1) - f(0) - f'(0)\big)x^2. \qquad (1)$$

(d) Vérifier que le polynôme $P(x)$ défini par l'expression du membre de droite de (1) est l'unique polynôme P tel que

$$P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0) \quad \text{et} \quad P(1) = f(1).$$

Donner une majoration de l'erreur $\left|P(x) - f(x)\right|$, $x \in [0,1]$.

Exercice 3. Soit α un paramètre réel et soient les matrices $A(\alpha)$, P et le vecteur b définis par

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) À quelle condition (sur α) la matrice $A(\alpha)$ est-elle inversible ?

(b) À quelle condition (sur α) la matrice $A(\alpha)$ admet-elle décomposition LU ?

(c) Calculer si elle existe la décomposition LU de la matrice $M = P \times A(-1)$.

(d) Résoudre le système linéaire $Mx = b$.