Université de Rouen
L2 Mathématiques
Année 2006-2007

Intégrale de Riemann et intégrales généralisées
Examen du 01 février 2007, durée 3h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. L'usage de tout document est interdit.

Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée. Une question non résolue n'empêche pas toujours de faire les suivantes : dans ce cas indiquez clairement que vous admettez le(s) résultat(s) de la question non faite.

Exercice 1. Pour $n \geq 1$ on définit S_n par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$

(a) Interpréter S_n comme une somme de Riemann.

(b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2.

(a) Montrer que pour $x \in]-\pi, \pi[$ les fonctions f et g suivantes sont bien définies :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos u}{1+\cos u} du, \qquad g(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1+\cos u)^2} du.$$

(b) À l'aide d'une intégration par partie établir une relation entre $f(x)$ et $g(x)$, $x \in]-\pi, \pi[$.

(c) Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ on a

$$\int_0^x \frac{\sin^2 u}{(1+\cos u)^2} du = \int_0^x \frac{1-\cos u}{1+\cos u} du = x - 2f(x)$$

[indication : ne pas oublier que $x = \int_0^x du$]

(d) En déduire les valeurs respectives de $f(x)$ et $g(x)$.

Exercice 3.

(a) Pour $0 < x < \pi/2$ calculer l'intégrale

$$\int_0^x \frac{\cos^2 u}{(1+\cos^2 u)} du.$$

[indication : on pourra justifier et faire le changement de variable $u = \text{Arctan}\, t$]

(b) Déterminer la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u}{(1+\cos^2 u)} du.$$

Exercice 4.

(a) Déterminer en fonction de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (1+t)^\beta}$$

(b) Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} dt$$

[indication : on pourra utiliser le fait que $\sin(t) = t - t^3/6 + o(t^3)$]

Tournez la page S.V.P.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit la fonction $J_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\big(nt - x \sin t\big) dt.$$

(a) Montrer que J_n est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que si n est pair alors $J_n(-x) = J_n(x)$ et que si n est impair alors $J_n(-x) = -J_n(x)$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $J_{-n}(x) = J_n(-x)$.

(d) Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $J_n'(x)$ et $J_n''(x)$ sous forme d'intégrales.

(e) Montrer que

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos t)\big[(n - x \cos t) \cos\big(nt - x \sin t\big)\big] dt.$$

En déduire que J_n vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$