Université de Rouen
L2 Mathématiques
Année 2007-2008

Intégrale de Riemann et intégrales généralisées
Examen du 25 janvier 2008, durée 3h

L'USAGE DE LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉ. L'USAGE DE TOUT DOCUMENT EST INTERDIT.

Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée. Une question non résolue n'empêche pas toujours de faire les suivantes : dans ce cas indiquez clairement que vous admettez le(s) résultat(s) de la question non faite.

Exercice 1. Pour $n \geq 1$ on définit la quantité u_n par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

(a) Interpréter la quantité u_n comme une somme de Riemann. On précisera la fonction, l'intervalle ainsi que la subdivision pointée.

(b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 2. On rappelle que la fonction logarithme népérien est définie par

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Le but est de (re)démontrer quelques propriétés sur cette fonction **uniquement** avec les propriétés vues en cours sur l'intégrale donc **sans utiliser vos connaissances sur la fonction logarithme**.

(a) Montrer que pour tout a, b dans $]0, +\infty[$ on a

$$\int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt.$$

[indication : commencer par découper l'intervalle $[1, ab]$ en $[1, a]$ et ce qu'il faut.]

(b) En déduire que si n est un entier naturel non nul alors

$$\int_1^{a^n} \frac{1}{t} dt = n \int_1^a \frac{1}{t} dt.$$

(c) En déduire que si $a \in]0, +\infty[$ et $b \in \mathbb{Q}^*$ alors

$$\int_1^{a^b} \frac{1}{t} dt = b \int_1^a \frac{1}{t} dt.$$

[on pourra commencer par le cas $b = p/q$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 1$]

Exercice 3.

(a) Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)}^{\alpha} dt.$$

(b) Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt.$$

On pourra s'aider de : au voisinage de $+\infty$ on a $(1+t)^\alpha - t^\alpha \approx C(\alpha) t^{\alpha-1}$ où $C(\alpha) > 0$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4. On considère la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp\left(-x^2\right) \int_0^x \exp(t^2)dt.$$

(a) Justifier le fait que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de f' *(ne pas chercher à calculer de primitive)*. Montrer que f vérifie pour tout x dans $\mathbb{R}$: $f'(x) + 2xf(x) = 1$.

(b) Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. La fonction f est-elle paire ou impaire ?

(c) Montrer que la fonction $t \mapsto \exp(t^2)$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$x \exp(-x^2) \leq f(x) \leq x.$$

(d) Le but de cette question est de déterminer un équivalent de f en l'infini.

-i- À l'aide de la formule d'intégration par parties montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\int_1^x \exp(t^2)dt = \frac{\exp(x^2)}{2x} + \frac{\exp(x^2)}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{\exp(t^2)}{t^4}dt.$$

-ii- On pose $h(t) = \frac{\exp(t^2)}{t^2}$ pour tout $t \neq 0$. Montrer que h est une fonction croissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a

$$\int_1^x \frac{\exp(t^2)}{t^4}dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2}dt.$$

-iii- À l'aide des questions -i- et -ii- montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{\exp(x^2)} \int_1^x \exp(t^2)dt \right) = 1.$$

En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(e) -i- Montrer que si f admet un maximum en $b \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $f(b) = \frac{1}{2b}$.

-ii- En déduire que si f admet un maximum sur $]0, +\infty[$ celui-ci est atteint en un unique point.

Question bonus Montrer que f admet un maximum en un point de $\mathbb{R}^{+*}$.