Université de Rouen
L2 Mathématiques
Année 2006-2007

Intégrale de Riemann et intégrales généralisées
Examen du 4 septembre 2007, durée 2h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. L'usage de tout document est interdit.

Exercice 1. On considère, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les intégrales

$$I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\,dx,$$

et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

Le but de cet exercice est notamment d'établir un lien entre I_p et v_n afin de calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

(a) Justifier l'existence de I_p. Calculer I_0 et I_1.

(b) Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p. En déduire I_2 et I_3.

(c) Montrer que pour tout $q \geq 1$

$$v_q + (-1)^q I_{2q} = \frac{\pi}{4}.$$

(d) A l'aide d'une majoration –simple– de la fonction $\dfrac{x^p}{1+x^2}$ déterminer $\lim_{p\to+\infty} I_p$. En déduire que la suite (v_n) admet une limite et préciser cette limite.

(e) A l'aide d'une intégration par parties déterminer $\lim_{p\to+\infty}(pI_p)$.

Exercice 2. Soit f une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $f(0) = 0$. On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \qquad h(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

On pose $\alpha = f'(0)$.

(a) Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) lorsque $t \to 0^+$?

(b) Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t)g'(t)$) lorsque $t \to 0^+$? (on exprimera les résultats en fonction de $\alpha = f'(0)$)

(d) Établir, pour $x > 0$, la relation

$$\int_0^x \big(f'(t)\big)^2 dt = \frac{1}{2}\big(g(x)\big)^2 + \int_0^x \big(\sqrt{t}g'(t)\big)^2 dt + \frac{1}{4}\int_0^x \big(h(t)\big)^2 dt \qquad (1)$$

(il faut bien sûr justifier l'intégrabilité sur $]0, x]$ de chacune des fonctions qui interviennent).

(e) On suppose que f est telle que $\int_0^{+\infty} \big(f'(t)\big)^2 dt$ soit convergente. Montrer à l'aide de la propriété (1) que

$$\int_0^{+\infty} \Big(\frac{f(t)}{t}\Big)^2 dt \quad \text{est convergente.}$$