Université de Rouen
L2 Mathématiques - Informatiques
Année 2006-2007

Algèbre
Examen du 30 janvier 2007, durée 3h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. L'usage de tout document est interdit.

Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée.

Question de cours.
Soient $(G,*)$ et (G',T) deux groupes et f un morphisme de $(G,*)$ dans (G',T). On note e l'élément neutre de G.
Démontrer que
$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \ker f = \{e\}.$$

Exercice 1.
Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\star$ par
$$(x_1,x_2)\star(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1).$$

(a) -i- Montrer que $(\mathbb{R}^2,+,\star)$ est un anneau commutatif unitaire noté A.
-ii- Chercher les diviseurs de 0 de l'anneau A.

(b) On considère l'application
$$f : \mathbb{R}[X] \to A, P \mapsto (P(0), P'(0)).$$
-i- Montrer que f est un homomorphisme d'anneaux.
-ii- f est-il surjectif ?

Exercice 2. Soient σ_1 et σ_2 les permutations suivantes :
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 9 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Décomposer σ_1, σ_2 et $\sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ en produit de cycles à supports disjoints. Calculer alors leurs signatures.

(b) Calculer σ_2^{2007} ainsi que $(\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1}$.

(c) Trouver toutes les permutations σ de $\mathcal{S}_9$ vérifiant $\sigma_1 \circ \sigma = \sigma_2$.

(d) Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de permutation σ telle que $\sigma^2 = \sigma_1$. Pour cela soit σ une permutation telle que $\sigma^2 = \sigma_1$.
-i- Soient $i = \sigma(3)$ et $j = \sigma(6)$. Que valent $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$?
-ii- Peut-on avoir $i, j \in \{1,2,4,5,7,8,9\}$? [justifier]
-iii- Conclure.

(e) Trouver au moins une permutation σ telle que $\sigma^2 = \sigma_2$. Pour cela on pourra remarquer –et démontrer– que si s est un cycle de longueur $2p+1$ (avec $p \geq 2$) alors $s^{p+1} \circ s^{p+1} = s$.

(f) Soit $\tau = (1\,2) \circ (3\,4)$. Trouver σ tel que $\sigma^2 = \tau$.

Exercice 3. Soit le polynôme $P = X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 4X + 4$.

A

(a) Calculer P' le polynôme dérivé de P.

(b) On pose $D = \mathrm{PGCD}(P,P')$. Calculer D (on prendra D unitaire).

(c) Existe-t-il deux polynômes A et B de $\mathbb{C}[X]$, premiers entre eux, tels que : $P = DA$ et $P' = DB$? Si oui déterminer A et B.

(d) Quelles sont les racines complexes de P et P' ? Donner leur ordre de multiplicité.

(e) Mettre P sous forme de produit de facteurs irréductibles :

-i- dans $\mathbb{C}[X]$;

-ii- dans $\mathbb{R}[X]$.

B

On pose $A = X^2 - X + 2$ et $B = 4X - 2$.

(a) Déterminer deux polynômes U_0 et V_0 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $U_0A + V_0B = 1$. [on pourra reprendre certains calculs en **A**–(b) pour éviter certains calculs]

(b) Déterminer deux polynômes U et V de $\mathbb{C}[X]$ tels que $UP + VP' = D$.

C

Soient Q un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ et Q' son polynôme dérivé. Montrer que Q et Q' sont premiers entre eux si et seulement si toutes les racines de Q sont simples.

Exercice 4. Dans ce qui suit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\overline{x}$ la classe de x dans l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(a) Trouver au moins un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $7u + 23v = 1$. [donner les détails]

(b) Montrer que $\overline{23}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Quel est son inverse ?

(c) Calculer l'ordre de $\overline{23}$ dans le groupe multiplicatif $\big((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times\big)$?