Université de Rouen
L2 Mathématiques - Informatiques
Année 2005-2006

Algèbre
Examen du 11 septembre 2006, durée 2h

L'USAGE DE LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉ. L'USAGE DE TOUT DOCUMENT EST INTERDIT.

Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée.

Exercice 1. Questions de cours

(a) Donner la définition d'un anneau unitaire.

(b) Donner la définition d'un morphisme de groupe.

Exercice 2. On considère $\mathscr{S}_4$ le groupe des permutations de $\{1,2,3,4\}$. Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{S}_4$. On pose $G_\sigma = \{s \in \mathscr{S}_4 : s \circ \sigma \circ s^{-1} = \sigma\}$. Le but est d'expliciter tous les éléments de G_σ.

(a) Décomposer σ et τ en produit de cycles à supports disjoints. En déduire l'ordre et la signature de σ et τ.

(b) Posons $\sigma_1 = t_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver $\sigma_2 \in \mathscr{S}_4$ telle que $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Calculer $\tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}$ et $\tau \circ \sigma_2 \circ \tau^{-1}$.

(c) Montrer que $\tau \in G_\sigma$.

(d) Montrer que G_σ est un sous groupe de $\mathscr{S}_4$. Donner alors au moins 4 éléments de G_σ (utiliser aussi la question (c)).

(e) Soit $s \in \mathscr{S}_4$ et soient $s_1 = s \circ \sigma_1 \circ s^{-1}$ et $s_2 = s \circ \sigma_2 \circ s^{-1}$. Montrer que s_1 et s_2 sont des transpositions telles que $s_1(s(1)) = s(4)$, $s_1(s(4)) = s(1)$, $s_2(s(2)) = s(3)$ et $s_2(s(3)) = s(2)$ et telles que $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$. Montrer que si $s \in G_\sigma$ alors on a soit ($s_1 = \sigma_1$ et $s_2 = \sigma_2$) soit ($s_1 = \sigma_2$ et $s_2 = \sigma_1$). Énumérer alors tous les éléments de G_σ.

Exercice 3.

(a) Trouver le couple (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $X^2 + 1$ divise $aX^3 + bX^2 - X + 1$.

(b) Peut-on trouver un couple (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $(X^2 + 1)^2$ divise $aX^3 + bX^2 - X + 1$?

Exercice 4. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle

$$R = \frac{3X^4 - 3X^3 + 9X^2 - 10X + 4}{X^2(X-1)(X^2+2)}.$$