

Licence de Mathématiques. Topologie 1993-1994

Devoir 2

Le contrôle sur le devoir 2 portera également sur les exercices des fiches 5 et 6 de T.D. Aucun document ne sera autorisé.

Exercice 1 :

Soit E un espace métrique compact. Soit f une application de E dans E vérifiant :

$$\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$$

a) Soit $x, y \in E$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} d(x, f^k(x)) \leq \varepsilon \\ d(y, f^k(y)) \leq \varepsilon \end{cases}$$

b) En déduire que $f(E)$ est dense dans E et que $\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

c) Montrer que f est une isométrie de E sur E .

Exercice 2 :

Soit E un espace métrique compact. Soit f une application de E dans E vérifiant :

$$\forall x, y \in E \quad x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

a) Montrer que f admet un unique point fixe (on pourra considérer l'application $x \longrightarrow d(f(x), x)$).

b) Donner un exemple de compact de $\mathbb{R}$ et d'une application de ce compact dans lui-même sans point fixe.

Exercice 3 :

Soit E un espace métrique non compact. Montrer qu'il existe des applications de E dans $\mathbb{R}$ continues mais non bornées.

Exercice 4 :

Soit E un espace localement compact et $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E .

a) Montrer que si O_0 est un ouvert non vide, on peut construire une suite $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts non vides relativement compacts telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \overline{O_{n+1}} \subset O_n \cap \Omega_n$.

b) Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{O_n} \neq \emptyset$. En déduire que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans E .

c) Montrer que si E est réunion dénombrable de fermés, alors un de ces fermés est d'intérieur non vide.