QUELQUES RAPPELS ET COMPLÉMENTS POUR $L^p(\Omega)$

Avertissement : ce qui suit n'est pas exempt de fautes. La présentation reprend quelques éléments du livre [2], l'avantage (ou le défaut) est une utilisation minimale de notions d'analyse fonctionnelle qui n'ont pas encore été vues/assimilées/sont en cours d'assimilation (barrer la mention inutile). La connaissance de son cours d'analyse fonctionnelle (voir aussi les livres [1, 3, 4, 5]) apportera une vision complémentaire et améliorera la compréhension des propriétés des espaces L^p qui nous concernent que sont approximations par des fonctions régulières, convolution, dualité, convergence faible...

TABLE DES MATIÈRES

1. Compléments sur la théorie de l'intégration et sur la topologie 1
1.1. Approximation par les fonctions simples 1
1.2. Théorème d'Egorov et de Lusin 2
1.3. Continuité absolue de l'intégrale 4
1.4. Théorème d'Ascoli–Arzelà 4
1.5. Weierstrass 5
2. $L^p(E)$ 9
2.1. $L^p(E)$ séparable pour $1 \le p < +\infty$ 10
2.2. Convergence faible 10
2.3. Continuité de la translation dans $L^p(E)$, $1 \le p < \infty$ 11
2.4. Approximation des fonctions de L^p par des fonctions régulières 13
2.5. Formes linéaires continues, cas L^2 15
2.6. Formes linéaires continues, cas L^p, $1 < p < +\infty$ –incomplet– 17
2.7. Extraction de sous-suite et convergence faible 19
2.8. Critère de compacité forte dans L^p 20
Références 21

1. COMPLÉMENTS SUR LA THÉORIE DE L'INTÉGRATION ET SUR LA TOPOLOGIE

On se place dans $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$) muni de la mesure de Lebesgue. Dans la suite E est un ensemble mesurable. On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1.1. **Approximation par les fonctions simples.**

Définition 1 (**fonction simple**)**.** Une fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$ est dite simple si elle est mesurable et prend un nombre fini de valeurs. Si $f_1, \dots, f_n$ désignent les différentes valeurs prises par f on pose $E_i = \{x \in E\,;\, f(x) = f_i\}$. Les ensembles E_i sont mesurables et disjoints, de plus f s'écrit sous une forme dite canonique

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathbb{1}_{E_i}.$$

Si $f_1, \dots, f_n$ sont n réels et $E_1, \dots, E_n$ n ensembles mesurables alors $\sum_{i=1}^n f_i \mathbb{1}_{E_i}$ est une fonction simple mais cette expression n'est pas nécessairement sa forme canonique (aucune hypothèse sur les f_i et E_i). La somme (resp. le produit) de deux fonctions simples est une fonction simple.

Proposition 2. *Soit $f : E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable positive. Alors il existe une suite de fonctions simples positives (f_n) telle que $f_n \leq f_{n+1}$ et*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E. \tag{1}$$

Démonstration.
→Idée : c'est la version dans $\mathbb{R}^N$ des fonctions étagées, $\sum a_k \mathbb{1}_{E_k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } f(x) \geq n, \\ \dfrac{j}{2^n} & \text{si } \dfrac{j}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{j+1}{2^n} \quad j = 0, 1, \dots, n2^n - 1 \end{cases}$$

Par construction on a bien $f_n \leq f_{n+1}$. Comme f est mesurable, les ensembles

$$\left\{x \in E : \frac{j}{2^n} \leq f(x) < \frac{j+1}{2^n}\right\}, \quad j = 0, 1, \dots, n2^n - 1,$$

et l'ensemble $\{x \in E ; f(x) \geq n\}$ sont mesurables et disjoints. Ainsi f_n est une fonction simple.

Soit x un élément de E. Si $f(x) \in \mathbb{R}$ alors soit n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $n_0 \geq f(x)$. Par construction de f_n on a alors

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq n_0.$$

Si $f(x) = +\infty$ alors $f_n(x) = n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Finalement dans les deux cas on a bien (1). □

Une fonction f de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ se décompose en

$$f = f^+ - f^-, \quad f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{et} \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f). \tag{2}$$

On obtient alors aisément le corollaire suivant,

Corollaire 3. *Soit $f : E \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite de fonctions simples (f_n) telle que $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout x dans E et $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ pour tout $x \in E$.*

1.2. **Théorème d'Egorov et de Lusin.**

Théorème 4 (**Egorov, version $\mathbb{R}^N$ mesure de Lebesgue**). *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables définies sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Supposons de plus que E soit de mesure finie, que la suite (f_n) converge presque partout dans E vers f et que f soit finie presque partout. Alors pour tout $\eta > 0$ il existe un fermé $E_{c,\eta}$ tel que $E_{c,\eta} \subset E$*

$$\mu(E \setminus E_{c,\eta}) \leq \eta$$
$$f_n \longrightarrow f \quad \textit{uniformément dans } E_{c,\eta}.$$

Démonstration.
→Idée : technique.

Posons $E_{m,n} = \bigcap_{j=n}^{\infty} \{x \in E ; |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\}$, qui est mesurable. Comme f_n converge vers f presque partout dans E et que f est finie presque partout dans E on a $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_{m,n})$.

Fixons $\eta > 0$. Pour tout $m \geq 1$, soit n_m tel que

$$\mu(E \setminus E_{m,n_m}) \leq \frac{\eta}{2^m}.$$

Posons $E_\eta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{m,n_m}$ qui est mesurable et vérifie $\mu(E \setminus E_\eta) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E_{m,n_m}) \leq \eta$. Sur E_η la convergence est uniforme. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et soit m tel que $m\varepsilon \geq 1$. Alors $E_\eta \subset E_{m,n_m}$ d'où $|f_n(x) - f(x)| < 1/m \leq \varepsilon$ pour tout $x \in E_\eta$ et tout $n \geq n_m$.

Dans le cas de le mesure de Lebesgue, comme $E_\eta \subset E$ est de mesure fini, il existe $E_{c,\eta}$ fermé tel que $E_{c,\eta} \subset E_\eta$ et $\mu(E_\varepsilon \setminus E_{c,\eta}) \leq \eta$. D'où le résultat. □

Remarque 5. Si E n'est pas de mesure finie, le résultat n'est pas vrai en général.

Définition 6. Une fonction f de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ est quasi-continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $E_{c,\varepsilon} \subset E$ tel que

$$\mu(E \setminus E_{c,\varepsilon}) \le \varepsilon \quad \text{et la restriction de } f \text{ à } E_{c,\varepsilon} \text{ est continue.} \tag{3}$$

Théorème 7 (Lusin). *Soit E un mesurable borné de $\mathbb{R}^N$. Une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si elle est quasi-continue.*

Commençons par les fonctions simples.

Proposition 8. *Une fonction simple définie sur un mesurable borné E de $\mathbb{R}^N$ est quasi-continue.*

Démonstration.
→Idée : les ouverts et les fermés engendrent les Lebesgue-mesurables et une fonction continue sur une union de fermés deux à deux disjoints est continue.

Soit f une fonction simple et soient $f_1, \dots, f_n$ les différentes valeurs prises par f. Comme les ensembles $E_i = \{x \in E, ; f(x) = f_i\}$ sont mesurables, pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit $E_{c,i} \subset E_i$ tel que

$$\mu(E_i \setminus E_{c,i}) \le \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Posons $E_{c,\varepsilon} = \bigcup_{i=1}^{n} E_{c,i}$ vérifiant $\mu(E \setminus E_{c,\varepsilon}) \le \varepsilon$. Les ensembles $E_{c,i}$ étant fermés, bornés et disjoints sont à distance strictement positive. Ainsi f étant constante sur chacun d'eux, f est continue sur $E_{c,\varepsilon}$. □

Preuve du théorème de Lusin : condition nécessaire.
→Idée : on combine le théorème d'Egorov avec une suite de fonctions simples qui sont quasi-continues. À un détail technique près on obtient convergence uniforme d'une suite de fonctions continue sur un ensemble E_c.

Supposons que $f \ge 0$. D'après la proposition 2 soit $(f_n)_{n\ge1}$ une suite de fonctions simples convergente simplement vers f dans E. Comme chaque fonction simple est quasi-continue, pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit un ensemble fermé $E_{c,n} \subset E$ tel que

$$\mu(E \setminus E_{c,n}) \le \frac{1}{2^{n+1}}\varepsilon,$$

et la restriction de f_n à $E_{c,n}$ soit continue. Par le théorème d'Egorov soit l'ensemble fermé $E_{c,0} \subset E$ tel que

$$\mu(E \setminus E_{c,0}) \le \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{et} \quad f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ dans } E_{c,0}.$$

Posons

$$E_{c,\varepsilon} = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_{c,n}$$

ensemble fermé vérifiant

$$\mu(E \setminus E_{c,\varepsilon}) = \mu\left(E \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} E_{c,n}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (E \setminus E_{c,n})\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E \setminus E_{c,n}) \le \varepsilon.$$

Comme les fonctions f_n sont continues sur $E_{c,\varepsilon}$ et convergent vers f uniformément dans $E_{c,\varepsilon}$ on en déduit que f est continue sur $E_{c,\varepsilon}$.

Si f n'est pas de signe constant la décomposition (2) permet d'écrire f comme la différence de deux fonctions quasi-continues, qui est donc quasi-continue. □

Preuve du théorème de Lusin : condition suffisante. Soit f une fonction quasi-continue sur E. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et soit $E_{c,\varepsilon}$ satisfaisant (3). Montrons que $G = \{x \in E ; f(x) \ge c\}$ est mesurable. Écrivons que

$$G = \big(G \cap E_{c,\varepsilon}\big) \cup \big(G \cap (E \setminus E_{c,\varepsilon})\big).$$

La restriction de f sur $E_{c,\varepsilon}$ étant continue, l'ensemble $G \cap E_{c,\varepsilon}$ est fermé (donc mesurable). De plus on a

$$\mu_l(G \cap (E \setminus E_{c,\varepsilon})) \le \mu_l(E \setminus E_{c,\varepsilon}) \le \varepsilon,$$

où μ_l désigne la mesure extérieure. Finalement par construction de la mesure de Lebesgue, l'ensemble G est mesurable. □

Remarque 9. Dans [4] on peut trouver la version suivante du théorème de Lusin : $\exists g$ continue à support compact dans E tel que $\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \leq \varepsilon$ et $\sup_E |g| \leq \sup_E |f(x)|$. Pour obtenir ce résultat il est nécessaire d'utiliser le lemme d'Urysohn. À partir du théorème 7 donné ici on peut aussi démontrer la version de [4] à l'aide du théorème de prolongement de Tietze qui est une conséquence du lemme d'Urysohn.

1.3. **Continuité absolue de l'intégrale.**

Théorème 10 (**continuité absolue de l'intégrale, Vitali**). *Soit E un mesurable et soit f une fonction de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ intégrable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable $A \subset E$ de mesure inférieure ou égale à δ on a*

$$\int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

Démonstration.
→Idée : évident si $|f|$ bornée et il est facile de trouver une fonction bornée $|f_n| \leq |f|$ telle que $\||f_n| - |f|\|_{L1} < \varepsilon$. Une autre façon de procéder est la contradiction : on construit $\mathbb{1}_{A_n} f$ tel que $\mu(A_n) \to 0$ et $\int_{A_n} |f|\, du \geq \varepsilon_0 > 0$, ce qui contredit le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Supposons $f \geq 0$. Pour $n \geq 1$ définissons la fonction f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n, \\ n & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$

La suite de fonction f_n est croissante et on a

$$\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et soit $n(\varepsilon)$ tel que

$$\int_E f_{n(\varepsilon)} d\mu > \int_E f d\mu - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Posons $\delta = \varepsilon/(2n(\varepsilon))$. Alors pour tout mesurable $A \subset E$ avec $\mu(A) \leq \delta$ on a

$$\int_A f d\mu \leq \int_A f_{n(\varepsilon)} d\mu + \int_{E\setminus A} (f_{n(\varepsilon)} - f) d\mu + \frac{1}{2}\varepsilon \leq n(\varepsilon)\mu(A) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

□

1.4. **Théorème d'Ascoli–Arzelà.** Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Une suite de fonctions (f_n) définies de E dans $\mathbb{R}$ est dite uniformément bornée s'il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_E |f_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite (f_n) est dite équi-continue dans E s'il existe une fonction continue croissante $\omega : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ tel que $\omega(0) = 0$ et pour tout x, y dans E,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cette dernière propriété revient à dire que les constantes d'uniforme continuité sont indépendantes de n.

Théorème 11 (**Ascoli**). *Soit f_n une suite de fonctions uniformément bornée et équicontinue dans E. Alors il existe une sous-suite $(f_{n'})$ et une fonction continue $f : E \mapsto \mathbb{R}$ telles que*

$$f_{n'}(x) \to f(x) \quad \forall x \in E; \tag{4}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad \forall x, y \in E; \tag{5}$$

$$f_{n'} \to f \quad \textit{uniformément sur tout compact } K \subset E. \tag{6}$$

Remarque 12. Nous donnons ici la version $\mathbb{R}^N$. Il faut savoir que ce théorème s'étend dans un cadre topologique plus général.

Démonstration.
→Idée : la séparabilité de $\mathbb{R}^N$ et le fait que la suite soit uniformément bornée permettent de définir par le procédé de la diagonale une sous-suite qui converge sur un ensemble dense. L'équicontinuité nous permet alors de montrer que cette limite existe sur E tout entier.

Considérons $\mathbb{Q}^N \cap E$ qui est dense dans E. Pour $x_1 \in \mathbb{Q}^N \cap E$, la suite de réels $f_n(x_1)$ est bornée. Nous pouvons alors extraire une sous-suite $f_{n,1}(x_1)$ qui converge vers un réel noté $f(x_1)$.

Pour $x_2 \in \mathbb{Q}^N \cap E$ la suite réelle $f_{n_1}(x_2)$ est bornée : il existe alors une sous-suite $f_{n_{1,2}}(x_2)$ telle que $f_{n_{1,2}}(x_2)$ converge vers $f(x_2)$.

À l'aide d'extractions successives de sous-suites on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$ une sous-suite $f_{n_{1,\dots,m}}$ telle que pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ on a

$$f_{n_{1,\dots,m}}(x_j) \to f(x_j).$$

On utilise alors le procédé de la diagonale qui consiste à choisir comme sous-suite $f_{n'} = f_{n_{1,\dots,n}}$. On a alors pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$f_{n'}(x_m) \to f(x_m).$$

Nous avons défini une fonction f sur $\mathbb{Q}^N \cap E$, il nous reste à l'étendre sur E. Soit $x \in E \setminus \mathbb{Q}^N$. Soit $\varepsilon > 0$ et par densité soit $x_l \in \mathbb{Q}^N \cap E$ tel que $|x - x_l| < \varepsilon$. Par la propriété d'équi-continuité nous avons

$$\begin{aligned}|f_{n'}(x) - f_{m'}(x)| &\le |f_{n'}(x) - f_{n'}(x_l)| + |f_{m'}(x) - f_{m'}(x_l)| + |f_{n'}(x_l) - f_{m'}(x_l)|\\ &\le 2\omega(\varepsilon) + |f_{n'}(x_l) - f_{m'}(x_l)|.\end{aligned}$$

La suite $f_{n'}(x_l)$ étant convergente, elle est de Cauchy. Comme $\omega(0) = 0$ et ω continue on obtient que la suite $f_{n'}(x)$ est de Cauchy. On note alors $f(x)$ cette limite et (4) est démontré. Par passage à la limite la propriété (5) subsiste pour la fonction f.

Montrons la propriété (6). Soit K un compact de E et soit $\varepsilon > 0$. La collection des boules $B(x,\varepsilon)$, $x \in E$, recouvre K. Comme K est compact soient $x_1,\dots,x_k \in E$ tels que la famille $(B(x_j,\varepsilon))_{1\le j\le k}$ soit un sous-recouvrement fini de K. Choisissons un indice $m(k)$ tel que pour tout $1 \le j \le k$ et pour tout $n' \ge m(k)$ on a

$$|f_{n'}(x_j) - f(x_j)| \le \varepsilon.$$

Si x est un élément de K, x appartient à une boule $B(x_j,\varepsilon)$ ce qui donne pour tout $n' \ge m(k)$

$$\begin{aligned}|f_{n'}(x) - f(x)| &\le |f_{n'}(x) - f_{n'}(x_j)| + |f_{n'}(x_j) - f(x_j)| + |f(x) - f(x_j)|\\ &\le \varepsilon + 2\omega(\varepsilon).\end{aligned}$$

À une bonne rédaction près la suite f_n converge uniformément sur K. □

1.5. **Weierstrass.** En première lecture il est conseillé de passer directement au théorème de Weierstrass en supposant que f est une fonction continue à support compact dans E (ouvert borné de $\mathbb{R}^n$) plutôt que uniformément continue dans E. En effet comme la preuve utilise la convolution il est nécessaire d'étendre f à tout $\mathbb{R}^n$, chose évidente quand f est à support compact dans E (0 en dehors de E) mais nettement moins évidente dans le cas général.

Avant de démontrer le théorème de Weierstrass, intéressons nous au module de continuité et au fait que si f est définie et uniformément continue sur un ouvert borné E alors on peut prolonger f en dehors de E sur tout $\mathbb{R}^n$ en une fonction g ayant le même module concave de continuité.

1.5.1. *Module de continuité - extension d'une fonction.* Soit f une fonction définie continue sur $E\subset\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de module de continuité

$$\omega_f(s)=\sup_{|x-y|<s,x,y\in E}|f(x)-f(y)|,\quad s>0. \tag{7}$$

La fonction $s\mapsto\omega_f(s)$ est positive, croissante dans $[0,+\infty[$ – elle se prolonge en 0. Nous supposerons aussi que $\omega_f(\cdot)$ est dominée sur $[0,\infty[$ par une fonction affine croissante, $l(\cdot)$, i.e. il existe $a,b\in\mathbb{R}_+$ tel que

$$\omega_f(s)\le as+b\quad\text{pour tout } s\in[0,\infty[\tag{8}$$

Un exercice classique consiste à démontrer que f est uniformément continue sur E si et seulement si $\omega_f(s)\to0$ quand $s\to0$. Nous appelons la fonction $s\to c_f(s)$ le module concave de continuité de f, i.e. la plus petite fonction concave définie sur $[0,\infty[$ dont le graphe est au dessus de celui de ω_f. Une telle fonction existe dès que nous avons supposé (8) et se construit par

$$c_f(s)=\inf\{l(s) : l \text{ est affine et } l\ge\omega_f \text{ sur } [0,\infty[\}. \tag{9}$$

Clairement de ces définitions découle

$$\omega(|x-y|)-|f(y)-f(x)|\ge f(x)\quad\text{pour tout } x,\ y \text{ dans } E. \tag{10}$$

Une autre façon de construire un module concave de continuité est de faire l'exercice suivant (honteusement repris des feuilles d'exercices d'Analyse Fonctionnelle de O. Alvarez).

Exercice 13 (module de continuité d'une fonction uniformément continue)**.** Soit f une fonction à valeurs réelles uniformément continue sur un ouvert borné E de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une fonction $c_f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ continue, avec $c_f(0)=0$, croissante, concave, sous-additive ($c_f(r+s)\le c_f(r)+c_f(s)$ pour tout $(r,s)\in\mathbb{R}_+$), vérifiant

$$|f(x)-f(y)|\le c_f\big(|x-y|\big),\qquad (x,y)\in E\times E.$$

La fonction c_f est un module concave de continuité de f. Il n'y a pas unicité sauf si on choisit le plus petit, voir (9)

Démonstration. Montrons tout d'abord que pour tout $\varepsilon>0$ il existe une constante $C_\varepsilon>0$ telle que pour tout $(x,y)\in E\times E$, $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon+C_\varepsilon|x-y|$. La fonction f étant uniformément continue, soit $\eta>0$ tel que si $|x-y|<\eta$ et $(x,y)\in E\times E$ alors $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$. Ajoutons que comme f est définie sur un borné et uniformément continue alors f est nécessairement bornée sur E. La constante $C_\varepsilon=2\sup_E|f|/\eta$ convient (il suffit de distinguer le cas $|x-y|<\eta$ – uniforme continuité – et le cas $|x-y|\ge\eta$).

Posons

$$c_f(r)=\inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon+C_\varepsilon r\}. \tag{11}$$

et montrons que cette fonction convient. Clairement $c_f(0)=0$.

Montrons que c_f est concave. Soient $(r_1,r_2)\in\mathbb{R}_+^2$ et $\lambda\in[0,1]$. Pour tout $\varepsilon>0$ et par définition de c_f nous avons

$$\varepsilon+C_\varepsilon\big(\lambda r_1+(1-\lambda)r_2\big)=\lambda(\varepsilon+C_\varepsilon r_1)+(1-\lambda)(\varepsilon+C_\varepsilon r_2)\ge\lambda c_f(r_1)+(1-\lambda)c_f(r_2),$$

ce qui donne alors

$$c_f\big(\lambda r_1+(1-\lambda)r_2\big)\ge\lambda c_f(r_1)+(1-\lambda)c_f(r_2)$$

et donc la concavité de la fonction c_f.

La sous-additivité de c_f découle de la concavité de c_f et du fait que $c_f(0)=0$. En effet, si $(r,s)\in\mathbb{R}_+^2$ avec $0<s<r$, en exprimant r comme barycentre de s et $s+r$ et s comme barycentre de 0 et $r+s$, nous obtenons

$$r=\frac{r-s}{r}(s+r)+\frac{s}{r}s,\quad s=\frac{s}{s+r}s+\frac{r}{s+r}0$$

et la convexité entraîne

$$c_f(r) \geq \frac{r-s}{r} c_f(s+r) + \frac{s}{r} c_f(s) \quad c_f(s) \geq \frac{s}{s+r} c_f(s+r),$$

d'où

$$c_f(s) + c_f(r) \geq \frac{r-s}{r} c_f(s+r) + \frac{s+r}{r} \times \frac{s}{s+r} c_f(s+r) = c_f(s+r).$$

La fonction c_f est bien sous-additive.

La croissance vient simplement de l'inégalité suivante ; à $\varepsilon > 0$ fixé si $0 \leq s \leq r$ alors

$$\varepsilon + C_\varepsilon s \leq \varepsilon + C_\varepsilon r.$$

La concavité (voir la partie convexité dans tout livre d'analyse de 2ème ou 3ème année) entraîne la continuité sur $]0, \infty[$. Il suffit de regarder en 0 pour s'apercevoir que c_f est continue en 0. $\square$

Remarque 14. Si une fonction φ est convexe alors pour tout a, la fonction $x \mapsto (\varphi(x) - \varphi(a))/(x - a)$ est croissante (c'est équivalent).

Théorème 15. *Soit f une application uniformément continue sur E un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec un module de continuité vérifiant* (8). *Alors il existe une fonction continue $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ coïncidant avec f sur E, telle que f et $\tilde{f}$ ont le même module concave de continuité c_f et*

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} = \sup_E f \quad \inf_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} = \inf_E f.$$

Remarque 16. Il existe d'autres théorèmes de prolongement comme le théorème de Tietze. Le thème des « théorèmes de prolongement » est un vaste sujet...

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, posons

$$g(x) = \inf y \in E\{f(y) + c_f(|x-y|)\}.$$

L'extension demandée est alors

$$\tilde{f}(x) = \min\{g(x); \sup_E |f|\}.$$

Si $x \in E$, par (10)

$$f(y) + c_f(|x-y|) \geq f(x) + c_f(|x-y|) - |f(x) - f(y)| \geq f(x)$$

pour tout y dans E. On en déduit que $g = f$ dans E. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout y dans E,

$$\inf_E f + \inf c_f(|x-y|) \leq g(x) \leq f(y) + c_f(|x-y|).$$

Cette inégalité implique donc

$$\inf_{\mathbb{R}^n} g = \inf_E f \quad \text{et} \quad \sup_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} = \sup_E f.$$

Pour prouver que f et $\tilde{f}$ ont le même module concave de continuité, il suffit de démontrer que g et f ont le même module concave de continuité. Soient x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Il existe y dans E tel que

$$g(x_1) \geq f(y) + c_f(|x_1 - y|) - \varepsilon.$$

Ainsi pour un tel y dans E,

$$g(x_1) - g(x_2) \geq c_f(|x_1 - y|) - c_f(|x_2 - y|) - \varepsilon.$$

Si $|x_2 - y| \leq |x_1 - x_2|$,

$$g(x_1 1) - g(x_2) \geq -c_f(|x_1 - x_2|) - \varepsilon$$

et sinon

$$|x_1 - y| > |x_2 - y| - |x_1 - x_2| > 0.$$

Comme la fonction $s \mapsto c_f(s)$ est concave, la fonction $s \mapsto -c_f(s)$ est convexe et par la remarque 14

$$\frac{c_f(|x_1 - y|) - c_f(0)}{|x_1 - y|} \geq \frac{c_f(|x_1 - y| + |x_2 - x_1|) - c_f(|x_1 - x_2|)}{|x_1 - y| + |x_2 - x_1| - |x_1 - x_2|} \geq \frac{c_f(|x_2 - y|) - c_f(|x_1 - x_2|)}{|x_1 - y|}.$$

Comme $c_f(0)=0$ on en déduit que

$$c_f(|x_1-y|)|-c_f(|x_2-y|)\geq -c_f(|x_1-x_2|).$$

Ainsi dans tous les cas on a démontré que

$$g(x_1)-g(x_2)\geq -c_f(|x_1-x_2|)-\varepsilon.$$

En inter-changeant les rôles de x_1 et x_2 et sachant que $\varepsilon>0$ est arbitrairement petit on obtient que

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leq c_f(|x_1-x_2|).$$

□

1.5.2. *Weierstrass.*

Théorème 17 (Weierstrass)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles uniformément continue définie dans un ouvert borné $E\subset\mathbb{R}^n$. Alors il existe une suite de polynôme $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\sup_E|f-P_j|\longrightarrow 0 \quad \text{quand } j \text{ tend vers l'infini.}$$

Démonstration. Par le théorème précédent nous pouvons toujours considérer f comme définie sur tout $\mathbb{R}^n$ et avec un module de continuité ω_f. A une translation et une homothétie près nous pouvons supposer que E est inclus dans l'intérieur du cube unité $\mathcal{Q}$ centré à l'origine de $\mathbb{R}^n$ et dont les faces sont parallèles aux coordonnées plan ($\mathcal{Q}=]-1/2,1/2[^n$).

Pour $x\in\mathbb{R}^n$ et $\delta>0$, soit $\mathcal{Q}_\delta(x)$ le n-cube de côté 2δ centré en x et congruent à $\mathcal{Q}$. Pour $j\in\mathbb{N}^*$ définissons

$$p_j(x)=\frac{1}{\alpha_j^n}\prod_{i=1}^n(1-x_i^2)^j,\quad \alpha_j=\int_{-1}^1(1-t^2)^j\,dt.$$

La famille p_j est une famille de polynôme (à plusieurs indéterminées) et p_j est de degré $2jn$ et satisfait

$$\int_{\mathcal{Q}_1(x)}p_j(x-y)\,dy=\int_{\mathcal{Q}}p_j(y)\,dy=1$$

pour tout j dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $\mathbb{R}^n$. La suite de polynômes qui converge vers f est basée sur la convolution :

$$P_j(x)=\int_{\mathcal{Q}}f(y)p_j(x-y)\,dy. \tag{12}$$

Par rapport à ce qui a été vu en T.D. pour la régularisation par convolution (voir aussi le polycopié sur les L^p) les fonctions polynômes p_j ont

- l'avantage d'être des polynômes
- le désavantage de ne pas être à support compact mais tout de même à décroissance très rapide (voir Figure 1)
- l'avantage de faire de $P_j=f*p_j$ un polynôme

Les P_j sont appelés les polynômes de Stieltjes relativement à f. Pour x dans E, continuons

$$P_j(x)-f(x)=\int_{\mathcal{Q}}f(y)p_j(x-y)\,dy-\int_{\mathcal{Q}_1(x)}f(x)p_j(x-y)\,dy.$$

Soit $\delta>0$ suffisamment petit tel que $\mathcal{Q}_\delta(x)\subset\mathcal{Q}$. Alors

$$\begin{aligned}|P_j(x)-f(x)|&\leq\int_{\mathcal{Q}_\delta(x)}|f(x)-f(y)|p_j(x-y)\,dy+\left|\int_{\mathcal{Q}\setminus\mathcal{Q}_\delta(x)}f(y)p_j(x-y)\,dy\right|\\&\quad+\left|\int_{\mathcal{Q}_1(x)\setminus\mathcal{Q}_\delta(x)}f(x)p_j(x-y)\,dy\right|\\&\leq\omega_f(\sqrt{n}\delta)+\sup_E|f|\int_{\mathcal{Q}\setminus\mathcal{Q}_\delta(x)}p_j(x-y)\,dy+\sup_E|f|\int_{\mathcal{Q}_1(x)\setminus\mathcal{Q}_\delta(x)}p_j(x-y)\,dy.\end{aligned}$$

Pour majorer les deux dernières intégrales, il suffit de remarquer pour $y\notin\mathcal{Q}_\delta(x)$,

$$p_j(x-y)\leq\alpha_j^{-n}(1-\delta^2)^{jn}.$$

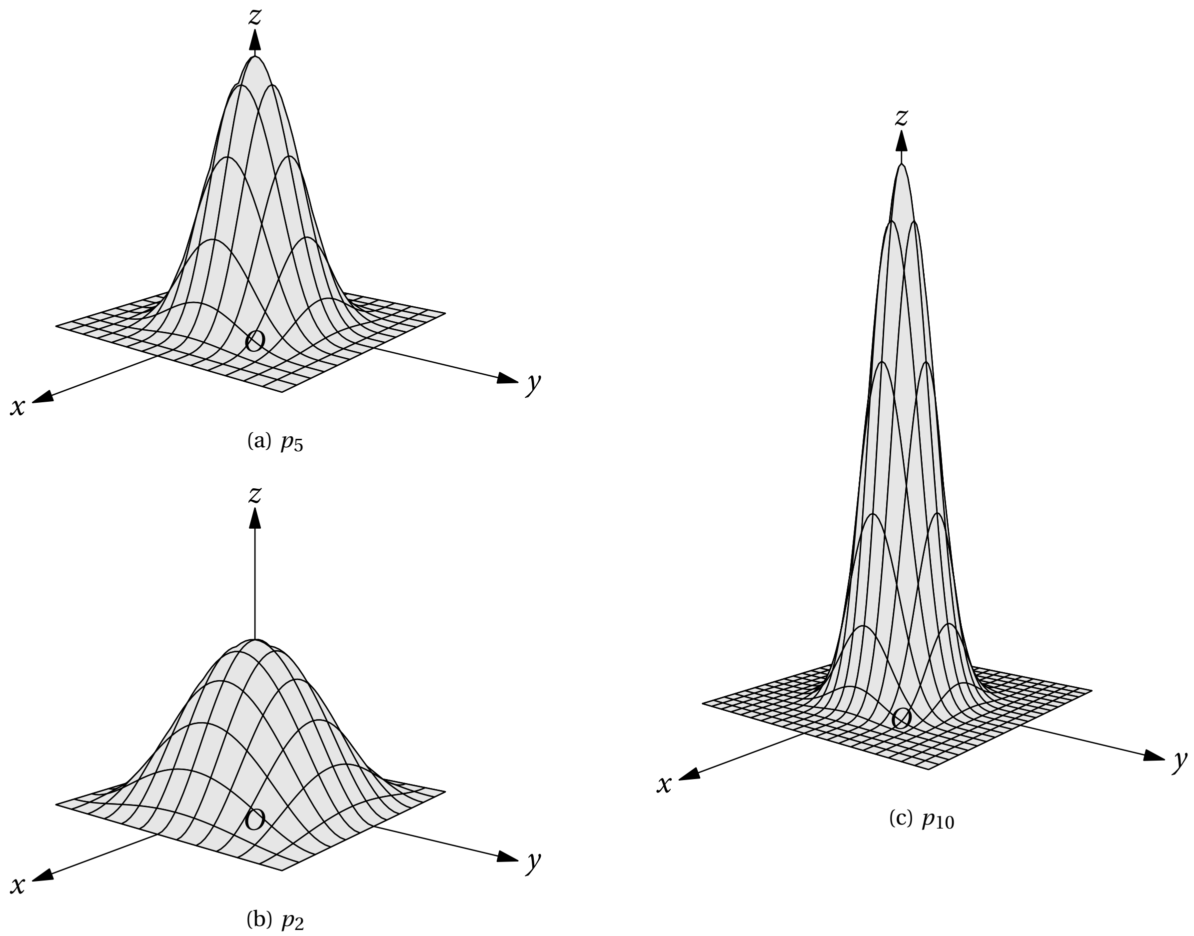

FIG. 1: Trois polynômes en dimension 2 : p_2, p_5 et p_{10}

De plus, par la définition de α_j,

$$\alpha_j \geq 2\int_0^1 (1-t^2)\,dt = \frac{2}{j+1}.$$

Nous en déduisons alors que

$$\sup_E |f - P_j| \leq \omega_f(\sqrt{n}\delta) + 2\sup_E |f| \Big(\frac{j+1}{2}\Big)^n \big(1-\delta^2\big)^{jn},$$

ce qui, à une bonne rédaction près, permet de conclure la preuve. □

Corollaire 18. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur E un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une suite de polynômes convergent uniformément vers f sur E.*

Corollaire 19. *Soit E un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Alors l'espace des fonctions continues sur E muni de la norme de la convergence uniforme est séparable.*

2. $L^p(E)$

Notons désormais dx la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$.

Théorème 20. *Soit f dans $L^p(E)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$. Alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe φ fonction simple dans $L^p(E)$ telle que $\|f - \varphi\|_{L^p} \leq \varepsilon$.*

Démonstration.
→Idée : c'est le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliquée à nos fonctions simples de la proposition 2 qui ont la bonne propriété d'être dominées par $|f|$.

Comme on peut décomposer f en $f = f^+ - f^-$, on peut toujours supposer que $f \geq 0$. Comme f est mesurable, il existe une suite φ_n de fonctions simples positives (par construction) telle que $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ et $\varphi_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$.

Si $1 \leq p < +\infty$, la suite $(f - \varphi_n)^p$ converge vers zéro presque partout dans E et est dominée par la fonction intégrable f^p. Ainsi, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a $\|f - \varphi_n\|_{L^p} \to 0$.

Si $p = \infty$, par construction des fonctions simples φ_n on a

$$\mu\left(\left\{x \in E;\, f(x) - \varphi_n(x) > \frac{1}{2^n}\|f\|_\infty\right\}\right) = 0,$$

ce qui entraîne $\|f - \varphi_n\|_\infty \leq 2^{-n}\|f\|_\infty$. □

2.1. $L^p(E)$ **séparable pour** $1 \leq p < +\infty$**.**

Théorème 21. *Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un mesurable. Alors $L^p(E)$ pour $1 \leq p < +\infty$ est séparable, i.e. contient un ensemble dénombrable dense.*

Démonstration.
→Idée : technique, long à rédiger...

Si $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ désignent l'ensemble dénombrables des pavés de $\mathbb{R}^N$ de la forme $Q = \prod_{i=1}^N]a_k, b_k[$ avec a_k, b_k dans $\mathbb{Q}$, on définit

$$S_n = \left\{\varphi;\, E \mapsto \mathbb{R};\, \varphi = \sum_{i=1}^n f_i \mathbb{1}_{Q_i \cap E} \quad \text{avec } f_i \in \mathbb{Q}\right\}$$

□

Chaque ensemble S_n est dénombrable, donc $S = \bigcup_{i=1}^n S_n$ est dénombrable. Ensuite, ..., on démontre que cet ensemble est dense dans $L^p(E)$.

Remarque 22. Si on suppose de plus que E est un ouvert, alors le "Ensuite, ..." est beaucoup moins compliqué. En effet on utilise le fait que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(E)$ et pour une fonction continue à support compact (donc uniformément continue) il est plus aisé de voir que l'on peut l'approcher (dans L^p) par une fonction du type S... (les pavés $\{Q_1, \ldots\}$ de diamètre $\leq \delta$ fixé forment une base dénombrable d'ouverts,..., soit f_1 continue à support compact dans E proche à $\varepsilon > 0$ près :w de f dans $L^p(E)$, soit δ la constante d'uniforme continuité de f_1 pour $\varepsilon/\mu(\mathrm{supp}(f_1))$, soit la collection d'ouverts disjoints type pavé rationnelle de diamètre plus petit que δ recouvrant E, $\mathrm{supp}(f_1)$ compact donc extraction d'une famille finie, d'où une fonction simple f_2 approchant f_1,...

Remarque 23. L^∞ n'est pas séparable. Il suffit de regarder la famille $\mathbb{1}_E \mathbb{1}_{B(x,r)}$, $x \in \mathbb{R}^N$ et $r \in \mathbb{R}$ ($B(x,r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^N$).

2.2. **Convergence faible.**

Définition 24. Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ conjugués (i.e. $1/p + 1/q = 1$). Une suite de fonctions (f_n) de $L^p(E)$ converge faiblement vers f dans $L^p(E)$ si

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n g\, dx = \int_E f g\, dx \quad \text{pour tout } g \in L^q(E).$$

Remarque 25 (convergence forte et convergence faible)**.** Pour distinguer la convergence en norme dans L^p de la convergence faible dans L^p, la convergence en norme dans L^p, i.e. $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$, est aussi appelée convergence forte dans L^p. Il est évident que convergence forte entraîne convergence faible.

Remarque 26. (exercice) Pour $n \geq 1$, soit f_n définie par $f_n(x) = \sqrt{n}$ si $0 \leq x \leq 1/n$ et $f_n(x) = 0$ si $1/n < x \leq 1$. Alors la suite (f_n) converge faiblement vers 0 dans $L^2(]0,1[)$ (indication : utiliser par exemple l'absolue continuité de l'intégrale) alors que $\int_{]0,1[} f_n^2\,dx = 1$. Ainsi (f_n) ne converge pas fortement vers 0 dans L^2.

La proposition suivante énonce une relation entre $\underline{\lim}\,\|f_n\|_p$ et $\|f\|_p$.

Proposition 27. *Soit* $1 \leq p < \infty$ *et soit* (f_n) *une suite convergente faiblement vers* f *dans* $L^p(E)$*. Alors*

$$\|f\|_{L^p(E)} \leq \varliminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p(E)}. \tag{13}$$

Démonstration.

→Idée : c'est l'inégalité de Hölder.

Si q désigne le conjugué de p $(1/p + 1/q = 1)$ alors la fonction $g = |f|^{p/q}\mathrm{sign} f$ appartient à $L^q(E)$. Ainsi par définition de la convergence faible de la suite f_n on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n g\,dx = \int_E f g\,dx = \|f\|^p_{L^p(E)}.$$

L'inégalité de Hölder nous donne

$$\left|\int_E f_n g\,dx\right| \leq \|f_n\|_{L^p(E)}\|g\|_{L^q(E)} = \|f_n\|_{L^p(E)}\|f\|^{p/q}_{L^p(E)}.$$

On en déduit alors que

$$\varliminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p(E)}\|f\|^{p/q}_{L^p(E)} \geq \|f\|^p_{L^p(E)},$$

d'où le résultat. □

Que faut-il ajouter à la convergence faible pour avoir convergence forte ? Pour $1 < p < \infty$ s'il y a convergence faible et convergence de la norme alors on a convergence forte.

Proposition 28. *Soit* $1 < p < \infty$ *et soit* (f_n) *une suite convergente faiblement vers* f *dans* $L^p(E)$*. Si de plus on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^p(E)},$$

alors f_n *converge fortement vers* f *dans* $L^p(E)$*, i.e.* $\|f - f_n\|_{L^p(E)} \to 0$.

Remarque 29. Pour $p = \infty$, le résulat est faux, en général, comme peut le montrer le contre-exemple suivant : la suite de fonctions f_n définies sur $]0,1[$ valant 0 sur $]0,1/n[$ et 1 sur $]1/n,1[$ converge faiblement vers 1, $\|f_n\|_\infty = 1$ mais aussi $\|f_n - 1\|_\infty = 1$.

Pour $p = 1$, nous avons aussi le contre-exemple suivant : la suite de fonctions (f_n) avec $f_n(x) = 4 + \sin nx$, $x \in]0,2\pi[$ converge faiblement vers 4 dans $L^1(]0,1[)$ (c'est un exercice), $\|f_n\|_1 \to \|4\|_1$ alors que $\|f_n - 4\|_1 = 4$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration très partielle. Démontrons le cas $p = 2$. Il suffit de constater que

$$\int_E (f - f_n)^2 dx = \int_E f^2 dx - 2\int_E f f_n dx + \int_E f_n^2 dx \to \int_E f^2 dx - 2\int_E f f\,dx + \int_E f^2 dx = 0,$$

où on a utilisé d'une part la convergence faible et d'autre part la convergence de la norme. □

2.3. **Continuité de la translation dans $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$.**

Définition 30. Si $f \in L^p(E)$ et $h \in \mathbb{R}^N$ on définit $T_h f$ la translation de f par

$$T_h f(x) = \begin{cases} f(x+h) & \text{si } x+h \in E, \\ 0 & \text{si } x+h \in \mathbb{R}^N \setminus E. \end{cases}$$

Clairement T_h définit une application de $L^p(E)$ dans $L^p(E)$. La proposition suivante énonce que cet opérateur est continu pour $1 \leq p < +\infty$.

Proposition 31. *Soit E un mesurable de $\mathbb{R}^N$ et soit f un élément de $L^p(E)$ pour $1 \le p < \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que*

$$\sup_{|h|\le\delta} \|T_h f - f\|_{L^p(E)} \le \varepsilon. \tag{14}$$

Démonstration.

→Idée : facile si f est uniformément continue. Si E borné f est quasi-continue sur E_c (aussi proche que l'on veut de E) par le théorème 7 et sur $E \setminus E_c$ la continuité absolue de l'intégrale donne une contribution négligeable. La question technique est que f et sa translatée $T_h f$ seront continues toutes les deux sur l'intersection de E_c et du translaté de E_c, mais est-ce un ensemble qui approche autant que l'on veut E ?

Supposons dans un premier temps que E est borné, i.e. contenu dans une boule B_R centré à l'origine et de rayon $R > 0$ suffisamment grand. Quitte à étendre f par 0 en $E \setminus B_R$ on peut supposer que $E = B_R$. Pour un ensemble $\mathscr{E} \subset E$ et un vecteur $\eta \in \mathbb{R}^N$ posons

$$\mathscr{E} - \eta = \{x \in \mathbb{R}^N ;\, x + \eta \in \mathscr{E}\}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé soit δ_p la constante donnée par le théorème de Vitali pour la continuité absolue de l'intégrale pour laquelle on a

$$\int_{\mathscr{E}} |f|^p\, dx \le \frac{1}{2^{p+1}} \varepsilon^p,$$

dès que $\mathscr{E} \subset E$ est un mesurable de mesure inférieure à δ_p. Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation si $\mu(\mathscr{E}) \le \delta_p$ on a

$$\mu\big((\mathscr{E} - \eta) \cap E\big) \le \delta_p,$$

et on en déduit que

$$\int_{\mathscr{E}} |T_\eta f - f|^p\, dx \le 2^{p-1} \Big\{ \int_{\mathscr{E}} |f|^p\, dx + \int_{(\mathscr{E}-\eta)\cap E} |f|^p\, dx \Big\} \le \frac{\varepsilon^p}{2}$$

Rappelons que le théorème de Lusin nous informe que f (mesurable) est quasi-continue. En conséquence, si on pose

$$\sigma = \frac{\delta_p}{2 + \mu(E)},$$

il existe un fermé $E_\sigma \subset E$ tel que $\mu(E \setminus E_\sigma) \le \sigma$ et tel que f soit uniformément continue dans E_σ. Donc il existe $\delta_\sigma > 0$ tel que

$$|T_h f(x) - f(x)|^p \le \frac{1}{2\mu(E)} \varepsilon^p \quad \text{pour tout vecteur } |h| < \delta_\sigma \text{ (et si } x \text{ et } x + h \text{ appartiennent à } E_\sigma).$$

Ainsi si $|h| < \delta_\sigma$ on a

$$\int_{E_\sigma \cap (E\sigma - h)} |T_h f - f|^p\, dx \le \frac{1}{2} \varepsilon^p.$$

Pour tout vecteur η de longueur $|\eta| < \sigma$, par simple calcul,

$$\mu(E \setminus (E_\sigma - \eta)) = \mu((E + \eta) \setminus E_\sigma) \le \mu(E \setminus E_\sigma) + \mu((E + \eta) \setminus E) \le \sigma + \sigma\mu(E).$$

On en déduit alors que

$$\mu\Big(E \setminus \big[E_\sigma \cap (E_\sigma - \eta)\big]\Big) \le \mu(E \setminus E_\sigma) + \mu(E \setminus (E_\sigma - \eta)) \le \sigma(2 + \mu(E)) = \delta_p\text{ů}$$

Si h est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ tel que $|h| \le \delta = \min(\sigma, \delta_\sigma)$, nous avons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \int_E |T_h f - f|^p\, dx &\le \int_{E_\sigma \cap (E_\sigma - h)} |T_h f - f|^p\, dx + \int_{E \setminus [E_\sigma \cap (E_\sigma - \eta)]} |T_h f - f|^p\, dx \\ &\le \int_{E_\sigma \cap (E_\sigma - h)} |T_h f - f|^p\, dx + \frac{1}{2} \varepsilon^p \le \varepsilon^p, \end{aligned}$$

ce qui conclut le cas E borné.

Si E n'est pas borné, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe R suffisamment grand tel que pour tout $|h| < 1$,

$$\int_{E\cap\{|x|>2R\}} |T_h f - f|^p dx \le 2^p \int_{E\cap\{|x|>R\}} |f|^p dx \le \frac{1}{2^p}\varepsilon^p.$$

Pour un tel R fixé, il existe alors (c'est le cas borné), $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que

$$\sup_{|h|<\delta} \|T_h f - f\|_{L^p(E\cap\{|x|<2R\}} \le \frac{1}{2}\varepsilon.$$

On en déduit alors que

$$\sup_{|h|<\delta} \|T_h f - f\|_{L^p(E)} \le \sup_{|h|<\delta} \|T_h f - f\|_{L^p(E\cap\{|x|<2R\}} + 2\|f\|_{L^p(E\cap\{|x|>R\}} \le \varepsilon.$$

Remarque 32. La proposition est fausse pour $p = \infty$. Chercher un contre-exemple.

□

2.4. **Approximation des fonctions de L^p par des fonctions régulières.** Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On rappelle que le support d'une fonction continue est défini par $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{f(x) \neq 0\}}$. Une fonction f définie de E dans $\mathbb{R}$ est à support compact si son support $\mathrm{supp}(f)$ est un compact inclus dans E.

Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ est dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $f \in L^p(E)$ pour tout ensemble E mesurable borné inclus dans $\mathbb{R}^N$. Une fonction de $L^p(E)$ peut être vue comme une fonction de $L^p(\mathbb{R}^N)$ en prolongeant simplement f par 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus E$. Dans ce sens une fonction de $L^p(E)$ est dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ mais la réciproque est fausse en général.

Si E est un Lebesgue–mesurable de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^p(E)$ on peut toujours supposer que E est ouvert par une extension similaire.

Rappelons la définition de ρ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^+$

$$\rho(x) = \begin{cases} k\exp\big(\dfrac{1}{1-|x|^2}\big) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \ge 1, \end{cases}$$

où $k > 0$ est choisi de façon à avoir $\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ on définit alors la suite régularisante

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\rho\big(\frac{x}{\varepsilon}\big).$$

Les fonctions ρ et ρ_ε sont dans $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et de plus

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon dx = 1 \quad \text{et } \rho_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{pour } |x| > \varepsilon.$$

Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ on définit la convolée de ρ_ε et de f par

$$x \mapsto (\rho_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y) f(y) dy. \tag{15}$$

Comme ρ_ε est dans $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, le produit de convolution $\rho_\varepsilon * f$ est dans $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. On dit alors que $\rho_\varepsilon * f$ est une régularisation de f.

On remarque que dans (15) le domaine d'intégration est la boule centrée en x et de rayon ε. Comme f a été étendue en dehors de E par 0, (15) est parfaitement défini. Ajoutons enfin que si $\mathrm{supp}(f) \subset E$ et est à une distance non nul de ∂E alors

$$\rho_\varepsilon * f \in \mathscr{C}_0^\infty(E) \quad \text{dès que } \varepsilon < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(f), \partial E).$$

La proposition suivante donne le comportement de la suite $\rho_\varepsilon * f$ quand ε tend vers 0.

Proposition 33. *Soit f un élément de $L^p(E)$ pour $1 \le p < \infty$. Alors $\rho_\varepsilon * f \in L^p(E)$ et*

$$\|\rho_\varepsilon * f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} (= \|f\|_{L^p(E)}). \tag{16}$$

La régularisation $\rho_\varepsilon * f$ vérifie

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\rho_\varepsilon * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0. \tag{17}$$

Si de plus $f \in \mathscr{C}(E)$, alors

(18) $\rho_\varepsilon * f$ *converge uniformément vers f sur tout compact $K \subset E$.*

Démonstration.
→Idée : pour (16) c'est Fubini, pour (17) on utilise la continuité de la translation dans L^p et pour (18) c'est facile.

Par l'inégalité de Hölder (q désigne le conjugué de p)

$$\begin{aligned}|\rho_\varepsilon * f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy\right| &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\,dy\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_\varepsilon * f|^p\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\,dx\right)|f(y)|^p\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p\,dy,$$

ce qui donne (16) (en utilisant le théorème de Fubini).

Pour établir (17) écrivons

$$\begin{aligned}|\rho_\varepsilon * f(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\big(f(y)-f(x)\big)\,dy\right| &\le \int_{|\eta|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(\eta)|f(x+\eta)-f(x)|\,d\eta\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(\eta)\,d\eta\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(\eta)|f(x+\eta)-f(x)|^p\,d\eta\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

En élevant à la puissance p l'inégalité ci-dessus puis en intégrant sur $\mathbb{R}^N$ par rapport à la variable x on obtient

$$\|\rho_\varepsilon * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \sup_{|\eta|<\varepsilon} \|T_\eta f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

D'après la continuité de la translation dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (voir propriété (14) de la proposition 31) on en déduit alors (17). Pour démontrer la propriété (18), si K est compact inclus dans E alors pour tout $x \in K$ on a

$$|\rho_\varepsilon * f(x) - f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\big(f(y)-f(x)\big)\,dy\right| \le \sup_{|x-y|<\varepsilon, x\in K} |f(x)-f(y)|,$$

d'où le résultat. □

Proposition 34. *Soit E un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors l'espace $\mathscr{C}_0^\infty(E)$ est dense dans $L^p(E)$ pour $1 \le p < \infty$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et soit K_ε un sous-ensemble compact de E tel que (c'est l'absolue continuité des fonctions intégrables)

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon} |f|^p\,dy \le \frac{1}{2^p}\varepsilon^p.$$

Soit $2\delta_\varepsilon = \operatorname{dist}(K_\varepsilon, \partial E)$ et posons

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in K_\varepsilon,\\ 0 & \text{pour } x \in E \setminus K_\varepsilon.\end{cases}$$

Si $\delta < \delta_\varepsilon$ les fonctions $f_\delta = f_\varepsilon * \rho_\delta$ ont un support compact dans E. Par la proposition 33 il existe δ'_ε tel que

$$\|f_\varepsilon - f_\delta\|_{L^p} \le \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{pour tout } \delta < \delta'_\varepsilon.$$

Ainsi pour de tel δ on a finalement que

$$\|f - f_\delta\|_{L^p(E)} \leq \|f_\varepsilon - f_\delta\|_{L^p(E)} + \|f\|_{L^p(E\setminus K_\varepsilon)} \leq \varepsilon.$$

□

Remarque 35. Un autre schéma pour démontrer (34) en utilisant juste la propriété (18) (facile à obtenir car ne nécessitant pas la continuité des translations dans $L^p(E)$) est possible. Au préalable il est nécessaire de démontrer que $\mathscr{C}_c(E)$ est dense dans $L^p(E)$ (E ouvert de $\mathbb{R}^N$). C'est assez clair quand on dispose du théorème de Lusin dans la version du [4] La preuve utilise le lemme d'Urysohn (simple dans $\mathbb{R}^N$ plus délicat dans un espace séparé localement compact) : si K compact, V ouvert dans E (espace séparé localement compact) alors il existe f continue à support compact dans E telle que $f \equiv 1$ dans K, $f \equiv 0$ dans $E \setminus V$ et $0 \leq f \leq 1$. On peut retrouver ce résultat avec le théorème de Lusin énoncé 7 et le théorème de prolongement de Tietze (qui est une conséquence du lemme d'Urysohn).

2.5. **Formes linéaires continues, cas L^2.** L'espace $L^2(E)$ est un Hilbert muni du produit scalaire $(f \cdot g) = \int_E f g\, dx$. Cependant nous n'utiliserons pas (volontairement) cette structure hilbertienne. Les méthodes employées ci-dessous permettent d'imaginer que des résultats du même type subsistent dans le cas L^p (qui n'est pas un Hilbert si $p \neq 2$).

Proposition 36. *$L^2(E)$ est uniformément convexe dans le sens où pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall f, g \in L^2(E)$ avec $\|f\|_{L^2(E)} = \|g\|_{L^2(E)} = 1$ et $\|f - g\|_{L^2(E)} \geq \varepsilon$ alors*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^2(E)} \leq 1 - \delta \tag{19}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'identité du parallélogramme :

$$\|f - g\|^2_{L^2(E)} + \|f + g\|^2_{L^2(E)} = 2\|f\|^2_{L^2(E)} + 2\|g\|^2_{L^2(E)}.$$

□

Remarque 37. Le fait que L^2 soit uniformément convexe entraîne aussi beaucoup de propriétés, voir votre cours d'analyse fonctionnelle.

Rappelons qu'une forme linéaire $\mathscr{F} : L^2(E) \mapsto \mathbb{R}$ est continue si et seulement si

$$\forall f \in L^2(E), \quad |\mathscr{F}(f)| \leq K\|f\|_{L^2(E)}, \tag{20}$$

et on note

$$\|\mathscr{F}\| = \sup_{f \in L^2(E), \|f\|_{L^2(E)} \neq 0} \frac{|\mathscr{F}(f)|}{\|f\|_{L^2(E)}} = \sup_{f \in L^2(E), \|f\|_{L^2(E)} = 1} |\mathscr{F}(f)|. \tag{21}$$

Proposition 38. *Tout élément g de $L^2(E)$ définit une forme linéaire, $\mathscr{F}_g$ sur $L^2(E)$ par la formule*

$$\mathscr{F}_g(f) = \int_E f g\, dx, \quad \forall f \in L^2(E). \tag{22}$$

De plus on a $\|\mathscr{F}_g\| = \|g\|_{L^2(E)}$.

Démonstration. L'application est évidemment définie et linéaire. L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne la continuité. Si $g \neq 0$ p.p. dans E, pour obtenir la norme de $\mathscr{F}_g$ on définit g^* par

$$g^* = \frac{|g|\text{sign}(g)}{\|g\|_{L^2(E)}} = \frac{g}{\|g\|_{L^2(E)}} \in L^2(E). \tag{23}$$

□

La théorème suivant énonce que toute forme linéaire continue sur $L^2(E)$ s'écrit sous la forme (22), c'est le théorème de représentation de Riesz. La démonstration dans des cas plus généraux utilisent le théorème de Radon-Nikodym (voir votre cours d'analyse fonctionnelle). Dans le cas des espaces L^2 (et même L^p) il est possible de n'utiliser que les notions de licence en théorie de la mesure et topologie.

Théorème 39. *Soi $\mathscr{F}$ une forme linéaire continue dans $L^2(E)$. Alors il existe un unique élément $g \in L^2(E)$ tel que $\mathscr{F}$ soit égal à $\mathscr{F}_g$ donné par la formule* (22)*.*

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons la proposition suivante

Proposition 40. *Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux formes linéaires continues dans $L^2(E)$. Soit $g \in L^2(E)$ (non nul) et soit g^* défini par* (23)*. Si $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ vérifient*

$$\mathscr{F}_1(g^*) = \|\mathscr{F}_1\| = \mathscr{F}_2(g^*) = \|\mathscr{F}_2\| = 1$$

alors $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$.

Démonstration.
→Idée : c'est l'identité du parallélogramme ou l'uniforme convexité.

Supposons que $\mathscr{F}_1 \neq \mathscr{F}_2$. Soit $f \in L^2(E)$ tel que $\mathscr{F}_1(f) \neq \mathscr{F}_2(f)$ et posons

$$w = \frac{2f}{\mathscr{F}_1(f) - \mathscr{F}_2(f)} - \frac{\mathscr{F}_1(f) + \mathscr{F}_2(f)}{\mathscr{F}_1(f) - \mathscr{F}_2(f)} g^* \in L^2(E).$$

On vérifie que $\mathscr{F}_1(w) = 1$ et $\mathscr{F}_2(w) = -1$ et de plus pour $0 < t < 1$

$$1 + t = \mathscr{F}_1(g^* + tw) \leq \|cf_1\| \|g^* + tw\|_{L^2(E)} = \|g^* + tw\|_{L^2(E)}$$
$$1 + t = \mathscr{F}_2(g^* - tw) \leq \|cf_2\| \|g^* - tw\|_{L^2(E)} = \|g^* - tw\|_{L^2(E)}$$

L'identité du parallélogramme nous donne

$$\begin{aligned}(1+t)^2 &= \frac{\|g^* + tw\|^2_{L^2(E)} + \|g^* - tw\|^2_{L^2(E)}}{2} \\ &\leq \|g^*\|^2_{L^2(E)} + t^2\|w\|^2_{L^2(E)} \\ &\leq 1 + t^2\|w\|^2_{L^2(E)}.\end{aligned}$$

Finalement on obtient $2t + t^2 \leq t^2\|w\|^2_{L^2(E)}$ soit $2 + t \leq t\|w\|^2_{L^2(E)}$, ce qui entraîne une contradiction en faisant tendre t vers 0 sauf si $\|w\|_{L^2(E)} = 0$. □

Démonstration du théorème 39.
→Idée : construire un élément g dans L^2 tel que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_g$ coïncident au sens le proposition précédente.

On peut toujours supposer que $\|\mathscr{F}\| = 1$. Par définition (21) de $\|\mathscr{F}\|$ soit (f_n) une suite de fonctions de $L^2(E)$ telle que

$$\|f_n\|_{L^2(E)} = 1, \quad |\mathscr{F}(f_n)| \geq \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} |\mathscr{F}(f_n)| = 1.$$

En remplaçant si nécessaire f_n par $-f_n$ on peut toujours supposer que $\mathscr{F}(f_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons, par contradiction, que f_n est une suite de Cauchy dans $L^2(E)$. En effet si f_n n'est pas de Cauchy, soit $\varepsilon > 0$ tel que $\|f_n - f_m\| \geq \varepsilon$ pour une infinité d'indices n et m. Par l'uniforme convexité de $L^2(E)$ soit $\delta > 0$ tel que

$$\left\|\frac{f_n + f_m}{2}\right\| \leq 1 - \delta,$$

pour ces mêmes indices n et m. Lorsque ces indices n et m tendent vers l'infini (possible car il y en a une infinité) on obtient

$$2 = \lim\{\mathscr{F}(f_m) + \mathscr{F}(f_n)\} = \lim \mathscr{F}(f_n + f_m) \leq \overline{\lim}\, \|f_n + f_m\|_{L^2(E)} \leq 2(1-\delta),$$

ce qui entraîne une contradiction.

Donc la suite (f_n) est de Cauchy dans $L^2(E)$ et notons f sa limite. Par construction on a $\|f\|_{L^2(E)} = 1$. Posons

$$g = f, \quad g^* = f.$$

Soit $\mathscr{F}_g$ la forme linéaire associée à g par (22). Nous avons donc deux formes linéaires continues telles que

$$\mathscr{F}(g^*) = \mathscr{F}_g(g^*) = \|\mathscr{F}\| = \|\mathscr{F}_g\| = 1.$$

La proposition 40 entraîne $\mathscr{F} = \mathscr{F}_g$. □

2.6. **Formes linéaires continues, cas L^p, $1 < p < +\infty$ –incomplet–.** Nous énonçons les versions analogues à la section précédente dans le cas L^p. Si $p \neq 2$ nous perdons la structure hilbertienne, mais nous conservons un espace uniformément convexe ce qui entraîne des propriétés sur la dualité dans L^p.

Proposition 41. *$L^p(E)$ $(1 < p < +\infty)$ est uniformément convexe dans le sens où pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\forall f, g \in L^p(E)(E)$ avec $\|f\|_{L^p(E)} = \|g\|_{L^p(E)} = 1$ et $\|f-g\|_{L^p(E)} \geq \varepsilon$ alors*

$$\|\frac{f+g}{2}\|_{L^p(E)} \leq 1-\delta \tag{24}$$

Pour démontrer ce résultat on peut par exemple utiliser les inégalités de Hanner ou les inégalités de Clarkson dans L^p (qui ne sont pas très intuitives !)

Proposition 42 (inégalité de Hanner). *Soit f et g dans $L^p(E)$ $(1 \leq p < \infty)$. Alors ($\|\cdot\|_p$ désigne $\|\cdot\|_{L^p(E)}$)*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \quad \text{si } p \geq 2$$

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \quad \text{si } p \in [1,2]$$

$$\big(\|f+g\|_p + \|f-g\|_p\big)^p + |\|f+g\|_p - \|f-g\|_p|^p \geq 2^p\big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\big) \quad \text{si } p \geq 2$$

$$\big(\|f+g\|_p + \|f-g\|_p\big)^p + |\|f+g\|_p - \|f-g\|_p|^p \leq 2^p\big(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\big) \quad \text{si } p \in [1,2]$$

Proposition 43 (inégalité de Clarkson). *Soient $1 < p, q < +\infty$ avec q conjugué de p $(1/p + 1/q = 1)$. Soient f et g deux éléments de $L^p(E)$. Alors ($\|\cdot\|_p$ désigne $\|\cdot\|_{L^p(E)}$)*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} \quad \text{si } p \geq 2, \tag{25}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \geq \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} \quad \text{si } p \in]1,2], \tag{26}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \geq \Big(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\Big)^{q-1} \quad \text{si } p \geq 2, \tag{27}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leq \Big(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}\Big)^{q-1} \quad \text{si } p \in]1,2], \tag{28}$$

Avec les inégalités de Clarkson il est aisé de démontrer que $L^p(E)$ est uniformément convexe pour $1 < p < +\infty$.

Démonstration de la proposition 41. Soient f et g dans $L^p(E)$ satisfaisant

$$\|f\|_{L^p(E)} = \|g\|_{L^p(E)} = 1 \quad \text{et} \quad \|f-g\|_{L^p(E)} \geq \varepsilon > 0.$$

Par l'inégalité de Clarkson on obtient

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p(E)}^p \leq 1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p} \quad \text{si } p \geq 2,$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p(E)}^q \leq 1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q} \quad \text{si } p \in]1,2].$$

En prenant la puissance $1/p$ (resp $1/q$) et une inégalité sur les puissances on obtient le résultat voulu. □

Si q est le conjugué de p $(1/p+1/q=1)$ le résultat principal est le théorème de représentation de Riesz qui identifie le dual de L^p et L^q.

Rappelons qu'une forme linéaire $\mathscr{F} : L^p(E) \mapsto \mathbb{R}$ est continue si et seulement si

$$\forall f \in L^p(E), \quad |\mathscr{F}(f)| \le K\|f\|_{L^p(E)}, \tag{29}$$

et on note

$$\|\mathscr{F}\| = \sup_{f\in L^p(E), \|f\|_{L^p(E)}\neq 0} \frac{|\mathscr{F}(f)|}{\|f\|_{L^p(E)}} = \sup_{f\in L^p(E), \|f\|_{L^p(E)}=1} |\mathscr{F}(f)|. \tag{30}$$

Proposition 44. *Soient $1<p<+\infty$ et $1<q<\infty$ le conjugué de p $(1/p+1/q=1)$. Tout élément g de $L^q(E)$ définit une forme linéaire, $\mathscr{F}_g$ sur $L^p(E)$ par la formule*

$$\mathscr{F}_g(f) = \int_E f g\, dx, \quad \forall f \in L^p(E). \tag{31}$$

De plus on a $\|\mathscr{F}_g\| = \|g\|_{L^q(E)}$.

Démonstration.
→Idée : inégalité de Hölder.

L'application est évidemment définie et linéaire. L'inégalité de Hölder nous donne la continuité. Si $g \neq 0$ p.p. dans E, pour obtenir la norme de $\mathscr{F}_g$ on définit g^* par

$$g^* = \frac{|g|^{q-1}\operatorname{sign}(g)}{\|g\|_{L^q(E)}^{p/q}}. \tag{32}$$

Un simple calcul donne $g^* \in L^p(E)$ et $\mathscr{F}_g(g^*) = \|g\|_{L^q(E)}$. □

La théorème suivant énonce que toute forme linéaire continue sur $L^p(E)$ s'écrit sous la forme (31) ou encore s'identifie avec un élément de $L^q(E)$, c'est le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 45. *Soient $1<p<+\infty$ et $1<q<\infty$ le conjugué de p $(1/p+1/q=1)$. Soit $\mathscr{F}$ une forme linéaire continue dans $L^p(E)$. Alors il existe un unique élément $g \in L^q(E)$ tel que $\mathscr{F}$ soit égale à $\mathscr{F}_g$ donnée par la formule* (31).

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons la proposition suivante

Proposition 46. *Soient $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux formes linéaires continues dans $L^p(E)$. Soit $g \in L^q(E)$ (non nul) et soit g^* défini par* (32)*. Si $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ vérifient*

$$\mathscr{F}_1(g^*) = \|\mathscr{F}_1\| = \mathscr{F}_2(g^*) = \|\mathscr{F}_2\| = 1$$

alors $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$.

Démonstration.
→Idée : on utilise les inégalités de Clarkson.

Supposons que $\mathscr{F}_1 \neq \mathscr{F}_2$. Soit $f \in L^p(E)$ tel que $\mathscr{F}_1(f) \neq \mathscr{F}_2(f)$ et posons

$$w = \frac{2f}{\mathscr{F}_1(f)-\mathscr{F}_2(f)} - \frac{\mathscr{F}_1(f)+\mathscr{F}_2(f)}{\mathscr{F}_1(f)-\mathscr{F}_2(f)} g^* \in L^p(E).$$

On vérifie que $\mathscr{F}_1(w)=1$ et $\mathscr{F}_2(w)=-1$ et de plus pour $0<t<1$

$$1+t = \mathscr{F}_1(g^*+tw) \le \|cf_1\|\|g^*+tw\|_{L^p(E)} = \|g^*+tw\|_{L^p(E)}$$
$$1+t = \mathscr{F}_2(g^*-tw) \le \|cf_2\|\|g^*-tw\|_{L^p(E)} = \|g^*-tw\|_{L^p(E)}$$

Si $p \ge 2$ l'inégalité de Clarkson (27) nous donne alors

$$\begin{aligned}(1+t)^q &= \left(\frac{\|g^*+tw\|_{L^p(E)}^p + \|g^*-tw\|_{L^p(E)}^p}{2}\right)^{q-1} \\ &\le \|g^*\|_{L^p(E)}^q + t^q\|w\|_{L^p(E)}^q \\ &\le 1 + t^q\|w\|_{L^p(E)}^q.\end{aligned}$$

De la même façon si $1 < p \le 2$, l'inégalité de Clarkson (26) nous donne

$$\begin{aligned}(1+t)^p &= \frac{\|g^* + tw\|^p_{L^p(E)} + \|g^* - tw\|^p_{L^p(E)}}{2} \\ &\le \|g^*\|^p_{L^p(E)} + t^q \|w\|^p_{L^p(E)} \\ &\le 1 + t^p \|w\|^p_{L^p(E)}.\end{aligned}$$

Dans le premier cas on obtient $qt + O(t^2) \le t^q \|w\|^q_{L^p(E)}$ et dans le deuxième, $pt + O(t^2) \le t^p \|w\|^p_{L^p(E)}$. Finalement dans les deux cas faire tendre t vers 0 donne une contradiction sauf si $\|w\|_{L^p(E)} = 0$. □

Démonstration du théorème 45. La preuve est très similaire à celle du cas L^2 en utilisant l'uniforme convexité de L^p et la proposition 46. □

2.7. **Extraction de sous-suite et convergence faible.** Du point de vue de la convergence forte (ou en norme) on ne peut rien dire d'une suite bornée dans $L^p(E)$ (voir par exemple la remarque 26). Cependant du point de vue de la convergence faible on peut extraire une sous-suite convergente.

Proposition 47. *Soit $1 < p < +\infty$. Soit (f_n) une suite bornée dans $L^p(E)$, i.e. $\exists K > 0$ tel que $\|f_n\|_{L^p(E)} \le K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n'})$ convergent faiblement dans $L^p(E)$.*

Démonstration.
→Idée : partant des formes linéaires dans L^q définies par $g \mapsto \int_E f_n g\, dx$, la séparabilité de L^q permet de définir une "forme linéaire continue limite", le théorème de représentation de Riesz permet de l'identifier à un élément de L^p.

Soit q le conjugué de p $(1/p + 1/q = 1)$. Comme $L^q(E)$ est séparable soit (g_n) une famille dénombrable –de fonctions simples– dense dans $L^q(E)$. Pour tout g_j soit

$$\mathscr{F}_n(g_j) = \int_E g_j f_n\, dx,$$

qui vérifie par l'inégalité de Hölder et par le fait que la suite (f_n) est bornée par K dans $L^p(E)$

$$|\mathscr{F}_n(g_j)| \le K \|g_j\|_{L^q(E)}.$$

La suite réelle $\mathscr{F}_n(g_1)$ est donc bornée. On peut donc en extraire une sous-suite convergente, noté $\mathscr{F}_{n,1}(g_1)$. De la même façon, de la suite bornée de réels $\mathscr{F}_{n,1}(g_2)$ on extrait la suite $\mathscr{F}_{n,2}(g_2)$ convergente. Ainsi de suite pour tout $m \in \mathbb{N}$ nous pouvons sélectionner une suite $(\mathscr{F}_{n,m})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{F}_{n,m}(g_j) \text{ existe} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m.$$

Le procédé de la diagonale nous permet alors d'extraire la suite $\mathscr{F}_{n'} = \mathscr{F}_{n,n}$ telle que pour toute fonction g_j

$$\lim_{n'\to\infty} \mathscr{F}_{n'}(g_j) \text{ existe.}$$

Par densité nous pouvons étendre cette limite pour tout élément dans $L^q(E)$. Soient $g \in L^q(E)$ et $\varepsilon > 0$. Par densité soit g_j tel que $\|g - g_j\|_{L^q(E)} < \varepsilon$. Comme la suite $\mathscr{F}_{n'}(g_j)$ est de Cauchy, soit n_ε tel que

$$\forall n', m' \ge n_\varepsilon, \quad |\mathscr{F}_{n'}(g_j) - \mathscr{F}_{m'}(g_j)| \le \varepsilon.$$

Nous avons alors, en rappelant que $\mathscr{F}_{n'}$ et $\mathscr{F}_{m'}$ sont deux formes linéaires de norme inférieure à K,

$$\begin{aligned}|\mathscr{F}_{n'}(g) - \mathscr{F}_{m'}(g)| &\le |\mathscr{F}_{n'}(g - g_j)| + |\mathscr{F}_{m'}(g - g_j)| + |\mathscr{F}_{n'}(g_j) - \mathscr{F}_{m'}(g_j)| \\ &\le 2K\|g - g_j\|_{L^q(E)} + \varepsilon \le (2K+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Finalement la suite réelle $\mathscr{F}_{n'}(g)$ est de Cauchy, donc converge. Posons

$$\mathscr{F}(g) = \lim_{n'\to\infty} \mathscr{F}_{n'}(g),$$

ce qui définit une forme linéaire continue dans $L^q(E)$. D'après le théorème de représentation de Riesz soit $f \in L^p(E)$ tel que $\mathscr{F}(g) = \int_E fg\,dx$, pour tout $g \in L^q(E)$. En conclusion nous avons

$$\lim_{n' \to \infty} \int_E g f_{n'}\,dx = \int_E g f\,dx, \quad \forall g \in L^q(E),$$

ou encore, la suite extraite $(f_{n'})$ converge faiblement vers f dans $L^p(E)$. □

2.8. **Critère de compacité forte dans L^p.** Pour démontrer que l'injection de H^1 dans L^2 est compact nous avons besoin d'un résultat caractérisant les précompacts de L^2. C'est l'objet du théorème suivant dans le cas L^p $(1 \le p < \infty)$.

Théorème 48. *Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit $\omega \subset E$. Soit $\mathscr{K}$ un sous ensemble borné de $L^p(E)$ pour $1 \le p < \infty$. Supposons que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta < \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^N \setminus E) \quad \textit{tel que} \tag{33}$$
$$\|T_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \quad \textit{avec} \quad |h| < \delta \quad \textit{et} \quad \forall f \in \mathscr{K}.$$

Alors $\mathscr{K}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Démonstration.

→Idée : par convolution on se ramène aux fonctions continues et au théorème d'Ascoli-Arzelà.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ vérifiant (33). On prolonge si nécessaire f en dehors de E par zéro. Pour n assez grand $(n > 1/\delta)$ en reprenant la preuve du théorème sur la convergence de la suite $\rho_{1/n} * f$ on a

$$|\rho_{1/n} * f(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{1/n}(x-y)\big(f(y) - f(x)\big)dy \right| \le \int_{|\eta|<1/n} \rho_{1/n}(\eta)|f(x+\eta) - f(x)|d\eta$$
$$\le \left(\int_{|\eta|<1/n} \rho_{1/n}(\eta)|f(x+\eta) - f(x)|^p d\eta \right)^{1/p}.$$

En élevant à la puissance p l'inégalité ci-dessus puis en intégrant sur ω par rapport à la variable x on obtient pour $n > 1/\delta$

$$\|\rho_{1/n} * f - f\|^p_{L^p(\omega)} \le \int_{|\eta|<1/n} \rho_{1/n}(\eta)d\eta \int_\omega |f(x+\eta) - f(x)|^p\,dx \le \varepsilon^p. \tag{34}$$

La famille $\mathscr{H} = (\rho_{1/n} * \mathscr{K})_{|\bar\omega}$, ($\bar\omega$ désigne la fermeture de ω) vérifie à n fixé,

$$|\rho_{1/n} * f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{1/n}(x-y)f(y)dy \right| \le \int_{|\eta|<1/n} \rho_{1/n}(\eta)|f(x+\eta)|d\eta \le C_n \|f\|_{L^p(\omega)},$$

et si $x+h$ et x sont dans $\bar\omega$

$$|\rho_{1/n} * f(x+h) - \rho_{1/n} * f(x)| \le \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_{1/n}(x+h-y) - \rho_{1/n}(x-y)| \cdot |f(y)|\,dy$$
$$\le \|T_h\rho_{1/n} - \rho_{1/n}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$
$$\le |h| C_n \|\nabla\rho_{1/n}\|_\infty \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le C'_n|h|,$$

car $\rho_{1/n}$ est une fonction au moins $\mathscr{C}^1$ et où la constante C'_n dépend de n (ou $\rho_{1/n}$) et $\mathscr{K}$.

La famille $\mathscr{H}$ (à n fixé) vérifie donc les hypothèses du théorème d'Ascoli–Arzelà, elle est relativement compact dans $\mathscr{C}(\bar\omega)$ et donc dans $L^p(\omega)$.

Nous pouvons conclure la preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et fixons n tel que $n > 1/\delta$ tel que

$$\text{pour tout } f \in \mathscr{K}, \quad \|\rho_{1/n} * f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon.$$

Comme la famille $\mathscr{H}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$ on peut recouvrir $\mathscr{H}$ par un nombre fini de boules de rayon ε dans $L^p(\omega)$, ce qui donne $(\varphi_i)_{1\le i\le m}$ éléments de $L^p(\omega)$ tels que les boules $B(\varphi_i, \varepsilon)$, $1 \le i \le m$ recouvrent $\mathscr{H}$. Montrons que $B(\varphi_i, 2\varepsilon)$, $1 \le i \le m$ recouvrent $\mathscr{K}_{|\omega}$. Soit $f \in \mathscr{K}_{|\omega}$ et soit φ_i tel que

$$\|\rho_{1/n} * f - \varphi\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon.$$

D'après (34) et l'inégalité ci-dessus nous obtenons

$$\|f-\varphi_i\|_{L^p(\omega)} \le \|f-\rho_{1/n}*f\|_{L^p(\omega)} + \|\rho_{1/n}*f-\varphi\|_{L^p(\omega)} < 2\varepsilon,$$

d'où le résultat. □

On dit que l'ouvert ω est fortement inclus dans E et on note $\omega \Subset E$ si $\bar{\omega} \subset E$ et $\bar{\omega}$ (la fermeture dans $\mathbb{R}^N$) est compact. Un autre critère de compacité utile est le suivant

Proposition 49. *Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $\mathcal{K}$ un sous ensemble borné de $L^p(E)$ pour $1 \le p < \infty$. Supposons que*

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \forall \omega \Subset E, \quad \exists \delta > 0, \quad \delta < \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^N \setminus E) \quad \textit{tel que} \\ \|T_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \quad \textit{avec} \quad |h| < \delta \quad \textit{et} \quad \forall f \in \mathcal{K}, \end{cases} \tag{35}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \omega \Subset E \quad \textit{tel que} \quad \|f\|_{L^p(E\setminus\omega)} < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{K}. \tag{36}$$

Alors $\mathcal{K}$ est relativement compact dans $L^p(E)$.

Démonstration.
→Idée : par (36) on contrôle en dehors de ω et par (35) et le théorème précédent on aura relative–compacité dans $L^p(\omega)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\omega \Subset E$ vérifiant la propriété (36). L'ouvert ω vérifie la propriété (35) ce qui entrîne par application du théoréme 48 que l'ensemble $\mathcal{K}_{|\omega}$ $\mathcal{K}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$. Il existe donc un nombre fini de boules de rayon ε de $L^p(\omega)$ recouvrant $\mathcal{K}_{|\omega}$, soit

$$\mathcal{K}_{|\omega} \subset \cup_{i=1}^m B(\varphi_i, \varepsilon), \quad \varphi_i \in L^p(\omega).$$

Il suffit alors d'étendre chaque fonction φ_i dans E tout entier par

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{si } x \in \omega, \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus \omega. \end{cases}$$

Clairement si on a $\|f-\tilde{\varphi}_i\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$ alors $\|f-\tilde{\varphi}_i\|_{L^p(E)} \le \|f-\tilde{\varphi}_i\|_{L^p(\omega)} + \|f\|_{L^p(E\setminus\omega)} < 2\varepsilon$. Les boules $B(\tilde{\varphi}_i, 2\varepsilon)$ dans $L^p(E)$ recouvrent $\mathcal{K}$. □

RÉFÉRENCES

[1] Haïm BREZIS. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[2] Emmanuele DIBENEDETTO. *Real analysis*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

[3] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Enseignement des Mathématiques. [The Teaching of Mathematics]. Masson, Paris, 1997. Cours et exercices. [Course and exercises].

[4] Walter RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[5] Walter RUDIN. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second édition, 1991.