Université de Rouen
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
UMR CNRS 6085

Mémoire de synthèse

présenté par

Olivier Guibé

en vue de l'obtention de

l'Habilitation à Diriger des Recherches
Discipline : Mathématiques

# Solutions renormalisées pour des équations aux dérivées partielles elliptiques, paraboliques et des systèmes couplés

Date de soutenance : 8 décembre 2010

Rapporteurs :

| | |
|---|---|
| **François Murat** | Directeur de Recherche, Université Pierre-et-Marie-Curie |
| **Benoît Perthame** | Professeur à l'Université Pierre-et-Marie-Curie |
| **Alessio Porretta** | Professeur à l'Université de Rome 2 'Tor Vergata' |

Composition du jury :

| | |
|---|---|
| **François Murat** | Directeur de Recherche, Université Pierre-et-Marie-Curie |
| **Dominique Blanchard** | Professeur à l'Université de Rouen |
| **Michel Chipot** | Professeur à l'Université de Zürich |
| **Alain Miranville** | Professeur à l'Université de Poitiers |
| **Chao-Jiang Xu** | Professeur à l'Université de Rouen |

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier François Murat, Benoît Perthame et Alessio Porretta d'avoir consacré du temps à examiner mes travaux.

Je remercie Michel Chipot d'avoir accepté de présider ce jury et je suis honoré de compter Alain Miranville et Chao-Jiang Xu parmi les membres du jury.

Dominique Blanchard m'a initié aux équations aux dérivées partielles. Je le remercie pour ses encouragements depuis mes débuts dans la recherche et les nombreuses discussions que nous avons eues desquelles ont émergé certaines idées détaillées dans ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes collègues de l'université de Rouen, qu'ils soient matheux ou non. Merci à Edwige, Isabelle, Marc, Marguerite et Sandrine pour leur gentillesse et leur efficacité à gérer les petits tracas quotidiens d'ordre administratif, matériel, etc.

Merci enfin à Emmanuelle, Juliette et Valentine. Toutes les trois savent à quel point leur présence m'est indispensable.

# Table des matières

# Introduction

Mes travaux de recherche, dont la liste figure à la fin de ce mémoire, concernent les équations aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques ou paraboliques et peuvent s'articuler en 4 parties :

- l'unicité de la solution d'équations elliptiques,
- les problèmes non coercifs,
- les problèmes à matrice de diffusion qui dégénère à l'infini ou qui explose à distance finie,
- les systèmes couplés.

Ma thèse, effectuée sous la direction de Dominique Blanchard, était consacrée à l'étude de systèmes d'équations aux dérivées partielles issus d'un modèle de thermoviscoélasticité. La particularité de ces systèmes réside dans la présence d'un terme en « gradient au carré », terme qui est *a priori* dans $L^1$. Durant la thèse j'ai utilisé la notion de solution renormalisée qui est adaptée aux traitements des équations aux dérivées partielles elliptiques, paraboliques à données $L^1$.

Il est connu depuis [BG89] [1] que pour une équation elliptique du type $-\text{div}(a(x,Du)) = f$ avec condition de Dirichlet et sous certaines conditions sur l'opérateur $a$, si $f$ est dans $L^1(\Omega)$ ou est une mesure bornée il existe au moins une solution au sens des distributions. Cependant, même dans le cas linéaire, la solution au sens des distributions n'est pas unique en général comme le prouve le contre-exemple donné dans [Ser64] (voir aussi [Pri95]). Pour une équation du type $-\Delta u - \text{div}(\varphi(u)) = f$, avec $f$ dans $L^1(\Omega)$ si aucune condition de croissance sur $\varphi$ n'est imposée et pour un second membre $L^1$ il y a peu de chance d'obtenir $\varphi(u)$ dans $L^1_{\text{loc}}$ et donc une solution au sens des distributions (voir par exemple [BDGM93]). Le cadre des solutions renormalisées a été développé pour tenter de pallier ces inconvénients. Initialement cette notion a été introduite pour les équations du premier ordre et pour les équations de Boltzmann par DiPerna et Lions (voir [DL89a ; DL89b]). Elle a été ensuite adaptée au cas des équations elliptiques à donnée $L^1$ dans [LM ; Mur93 ; Mur94] et au cas des équations paraboliques à donnée $L^1$ dans [Bla93 ; BM97]. Parallèlement les notions de solutions entropiques [BBGGPV95] et de SOLA (solution obtenue comme limite d'approximation [Dal96]) ont vu le jour pour les équations elliptiques ou paraboliques à données $L^1$. Ces trois notions sont en fait équivalentes (voir par exemple [Váz95] et [DMMOP99]) pour les données $L^1$ ou $L^1 + W^{-1,p'}$. Dans [DMMOP99] les auteurs donnent une notion de solution renormalisée pour les équations elliptiques à second membre mesure de Radon à variation bornée pour laquelle ils démontrent notamment l'existence d'une solution et un résultat de stabilité.

Concernant les problèmes paraboliques, la notion de solution renormalisée a permis de traiter de façon satisfaisante une grande variété d'équations. L'existence et l'unicité de la solution renormalisée pour des problèmes pseudo–monotones assez généraux sont démontrées dans

1. Par convention les articles présentés à la fin de ce mémoire, dont je suis co-auteur ou auteur, seront référencés par [G1], [G2], etc. Les articles et livres de la bibliographie le seront dans le style «alphabétique–année», c.-à.-d. [Lio69], [BG89] ou encore [DMMOP99].

[BMR01]. Une classe d'équation avec présence du terme $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$ à la place de $\frac{\partial u}{\partial t}$ est étudiée dans [BR98]. Dans [BP05] les auteurs démontrent, avec une nouvelle méthode, l'existence et l'unicité d'une solution renormalisée de problèmes de type Stefan.

D'une façon générale nous avons avec le cadre des solutions renormalisées des résultats d'existence, de stabilité et, pour certaines équations, d'unicité qui ne sont pas accessibles dans le cadre des solutions au sens des distributions.

Le chapitre 1 est consacré à l'unicité de la solution renormalisée d'équations elliptiques. Plusieurs types de problèmes sont abordés. Tout d'abord l'unicité de la solution renormalisée pour les données mesures, question qui semble toujours être ouverte aujourd'hui dans le cas général. Dans [DMMOP99] les auteurs démontrent l'existence d'une solution renormalisée pour une donnée mesure et un résultat partiel d'unicité qui concerne les solutions dites « comparables » : si $u$ et $v$ sont deux solutions renormalisées telles que $u-v$ est dans $L^\infty(\Omega)$ alors ces deux solutions sont égales presque partout. Dans [G5] j'ai affaibli cette condition de « solutions comparables » en la localisant dans un voisinage de l'ensemble où la mesure est singulière et en remarquant que seule une information sur la partie négative (ou positive) de $(u-v)$ est nécessaire. Ce résultat reste néanmoins partiel.

Pour les problèmes avec second membre $L^1$ ou $L^1 + W^{-1,p'}$ nous démontrons des résultats d'unicité pour quatre classes d'équations :

- dans [G3 ; G9] avec un terme d'ordre 0, noté $\lambda(x,u)$, strictement monotone en $u$
$$\begin{cases} \lambda(x,u) - \mathrm{div}(a(x,Du) + \varphi(u)) = f - \mathrm{div}(g) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
Une condition de Lipschitz locale sur $\varphi(s)$ par rapport à $s$ suffit pour assurer l'unicité de la solution. La preuve utilise les techniques usuelles des solutions renormalisées et la présence du terme $\lambda(x,u)$ est capitale dans ces résultats ;
- dans [G3 ; G9] sans le terme d'ordre 0 et pour $1 < p \le 2$
$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,Du) + \varphi(u)) = f - \mathrm{div}(g) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$
nous démontrons l'unicité sous des conditions de Lipschitz globales sur $\varphi$ ;
- dans [G8] pour $p=2$ et [G15] pour $1 < p \le 2$
$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u)|Du|^{p-2}Du + \varphi(u)) = f - \mathrm{div}(g) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
Sous des conditions globales mais très générales sur $a(x,s)$ et $\varphi(s)$ par rapport à la variable $s$ (qui permettent d'avoir une très forte croissance ou de très fortes oscillations) nous démontrons l'unicité de la solution renormalisée ;
- dans [G11]
$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x,u)Du) = f + \mathrm{div}(g) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
La matrice de diffusion $A(x,s)$ est supposée régulière en $x$ et localement hölderienne en $s$ de rapport plus grand que $1/2$. L'hypothèse sur la dépendance de $A(x,s)$ par rapport à $s$ est réellement locale, c.-à-d. sans aucune condition de croissance sur le module de continuité ou autre condition globale.

Pour ces quatre problèmes les méthodes qui permettent d'obtenir l'unicité sont différentes et combinent celles développées pour les cas variationnels (voir [CC85 ; CM89 ; BGM92]) et les techniques des solutions renormalisées. L'impact des solutions renormalisées et des troncatures ne se limite pas ici aux données $L^1$ puisque les résultats obtenus dans [G8 ; G11 ; G15] sont aussi nouveaux pour le cas variationnel et des données usuelles ($W^{-1,p'}$).

Dans le chapitre 2 nous nous intéressons à des problèmes elliptiques ou paraboliques non linéaires et non coercifs. Dans le cas elliptique l'équation modèle est

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \operatorname{div}(c(x)|u|^\gamma) + b(x)|Du|^\lambda = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $1 < p < N$, $0 \le \gamma \le p-1$ et $0 \le \lambda \le p-1$. Les fonctions $c$ et $b$ sont dans des espaces de Lebesgue (ou de Lorentz) adéquats. La présence des deux termes $-\operatorname{div}(c(x)|u|^\gamma)$ et $b(x)|Du|^\lambda$ entraîne un manque de coercivité de l'opérateur. Dans le cas linéaire $p = 2$ et $\gamma = \lambda = 1$ Stampacchia a démontré dans [Sta65] l'existence et l'unicité de la solution par transposition si 0 n'est pas dans le spectre de l'opérateur. Le cas linéaire est aussi étudié dans [BM73] pour $f$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Le cas général variationnel est traité dans [DVP98] via les techniques de symétrisation et les auteurs généralisent leurs résultats pour une donnée mesure dans [DVP96]. Dans ces travaux l'existence d'une solution est conditionnée à la petitesse de $b$ ou $c$ et la difficulté principale est d'obtenir des estimations *a priori* pour pouvoir passer à la limite dans un problème approché. Dans [G9] (nos résultats sont annoncés dans la note [G3]) nous considérons le cas $b \equiv 0$, une donnée dans $L^1(\Omega)$ et des conditions mixtes sur le bord. Nous démontrons l'existence d'une solution renormalisée ainsi que des résultats d'unicité pour une donnée dans $L^1$. Parallèlement le cas linéaire et des conditions mixtes (ainsi que le problème dual) ont été étudiés dans [Dron00 ; Dron02] ; pour une donnée mesure l'auteur donne l'existence d'une solution par transposition.

Dans [BMMP03 ; BMMP02 ; BMMP05] les auteurs considèrent le cas général $1 < p < N$, $c \equiv 0$ et une donnée mesure et adaptent la méthode de [BM73] pour obtenir les estimations *a priori* nécessaires à l'existence ou à l'unicité ($f \in L^1(\Omega)$) dans le cadre des solutions renormalisées. Avec Anna Mercaldo nous avons abordé le cas de l'opérateur complet, c.-à-d avec les deux termes $-\operatorname{div}(c(x)|u|^\gamma)$ et $b(x)|Du|^\lambda$, une donnée mesure (plus un terme dans $W^{-1,p'}(\Omega)$) dans le cadre des solutions renormalisées. Nous démontrons des résultats d'existence pour $c$ petit dans [G10] et pour $b$ petit dans un [G12]. Les estimations *a priori* sont obtenues via des estimations de type « log » sur le problème approché. Dans [G10 ; G12] nous avons besoin d'un résultat de stabilité pour les données mesures un peu plus général que celui démontré dans [DMMOP99] pour des équations avec un terme du type $-\operatorname{div}(c(x)|u|^\gamma)$. Nous donnons dans [G10] un tel résultat avec une preuve légèrement différente de celle donnée dans [DMMOP99]. Nous démontrons des résultats d'unicité de la solution pour une donnée dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ dans [G13]. Ces résultats utilisent les mêmes techniques que celles développées dans [G10 ; G12] et nous avons besoin de supposer que $b$ ou $c$ est suffisamment petit (et d'autres hypothèses) pour obtenir l'unicité.

Dans un travail récent, avec Rosaria DiNardo et Filomena Feo nous avons obtenu l'existence d'une solution renormalisée pour une version parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u + \operatorname{div}(c|u|^\gamma) + b|\nabla u|^\delta = f - \operatorname{div} g & \text{dans } Q_T \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Une différence importante par rapport au cas elliptique est que l'existence d'une solution est obtenue sans supposer que $b$ ou $c$ est suffisamment petit. Même si les exposants limites $\gamma = \frac{(N+2)(p-1)}{N+p}$ et $\delta = \frac{N(p-1)+p}{N+2}$ sont différents par rapport au cas elliptique du fait d'une moindre régularité en $(t,x)$ de la solution, pour $p = 2$ ceux–ci coïncident. La variable de temps $t$ qui ne joue évidemment pas le même rôle que la variable d'espace $x$, permet de découper le cylindre $\Omega \times (0,T)$ en suffisamment de « petits » cylindres. C'est là l'idée principale (comme dans [Porz99]) associée au cadre des solutions renormalisées développées dans [BM97 ; BMR01 ; BP01].

Dans le chapitre 3 nous étudions deux classes de problèmes, d'une part des équations elliptiques dont la matrice de diffusion dégénère à l'infini et d'autre part des équations elliptiques (et paraboliques) dont la matrice de diffusion explose à distance finie. Les problèmes dégénérés sont de la forme $-\mathrm{div}(A(x,u)Du) = f$ avec des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord et avec $f$ dans $L^1(\Omega)$. La matrice $A(x,s)$ vérifie une condition du type : $0 \leq \alpha(s)I \leq A(x,s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. dans $\Omega$. Si la fonction $\alpha$ est strictement positive et n'est intégrable ni sur $\mathbb{R}^+$ ni sur $\mathbb{R}^-$ il est relativement aisé via un changement d'inconnue de résoudre une telle équation. Les articles [ABFOT03 ; BDO98] étudient ce cas et abordent les questions non seulement d'existence de solution et mais aussi de régularité en fonction du second membre $f$ pour des fonctions $\alpha$ du type $\alpha(s) = 1/(1+|s|)^m$. Dans [G8] nous nous sommes placés dans le cas plus général où $\alpha(s) \geq 0$ avec $\int_0^\infty \alpha(s)ds = \int_{-\infty}^0 \alpha(s)ds = +\infty$. Comme la matrice $A(x,s)$ n'est pas nécessairement symétrique nous imposons une condition de structure sur $A$, qui traduit un contrôle de la partie anti-symétrique de $A$ par la partie symétrique. Sous de telles hypothèses un changement d'inconnue qui donnerait un problème non dégénéré n'est pas possible. L'hypothèse de non intégrabilité de $\alpha$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ entraîne que la solution $u$ sera finie presque partout. Nous définissons dans [G8] une notion de solution renormalisée pour cette équation et nous démontrons l'existence d'une solution pour tout $f$ dans $L^1(\Omega)$. La principale difficulté pour obtenir ce résultat vient de la possibilité pour $\alpha$ de s'annuler.

Dans [G7] la fonction $\alpha$ est supposée intégrable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive. À partir d'un exemple simple nous remarquons que l'intégrabilité de $\alpha$ peut conduire à avoir une solution qui vaut l'infini sur un ensemble de mesure non nulle. Même pour une donnée régulière la notion de solution faible ne permet pas prendre en compte une telle propriété. Nous donnons alors dans [G7] une notion de solution renormalisée qui autorise ce comportement. Nous démontrons l'existence d'une solution et si deux solutions valent l'infini sur le même ensemble nous donnons un résultat (partiel) d'unicité.

Si la matrice de diffusion $A$ explose à distance finie, c'est-à-dire vérifie $0 < \beta_0 < \beta(s)|\xi|^2 \leq A(t,s)\xi\cdot\xi$ où $\beta$ est une fonction définie sur $]-\infty, m[$ avec $m > 0$ et $\lim_{r\to m^-} \beta(r) = +\infty$, l'équation elliptique $-\mathrm{div}(A(x,u)Du) = f$ pose des difficultés similaires. En effet, hormis le cas où $\beta$ n'est pas intégrable sur $[0,m[$ (et où un changement d'inconnue conduit à un problème coercif), l'ensemble où la solution vaut $m$ peut être de mesure non nulle. Il faut donner un sens à l'équation sur cet ensemble. Dans [G14] nous étudions de telles équations elliptiques dont la matrice de diffusion explose à distance finie ainsi que la version parabolique. Nous définissons pour le cas stationnaire et le cas d'évolution une notion de solution renormalisée qui prend en compte le fait que l'ensemble $\{u = m\}$ soit de mesure non nulle.

Le chapitre 4 traite de systèmes couplés issus de la thermo-mécanique. L'article [G4] aborde un système de thermoviscoélasticité qui couple une équation de conservation de mouvement d'un matériau viscoélastique (en théorie des petites déformations) et une équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}\left[B_1\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + B_2\mathcal{E}(u)\right] + Df(\theta) = g \qquad \text{dans } \Omega\times(0,T),$$
$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} - \mathrm{div}\big(AD\theta\big) = B_1\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\mathrm{tr}\left(\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \qquad \text{dans } \Omega\times(0,T).$$

Le système est complété par des conditions initiales et des conditions aux limites. $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $T>0$ et les champs $\mathcal{E}(u)$ et $\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ sont respectivement les tenseurs de déformations linéarisées et des taux de déformations tandis que $B_1$ et $B_2$ sont les tenseurs d'ordre 4 de viscosité et d'élasticité. Ils vérifient des propriétés de symétrie et coercivité. La fonction $b$ (strictement croissante) et la fonction $f$ vérifient des hypothèses de croissance. La difficulté vient du fort couplage, de la non linéarité et du terme $B_1\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\mathrm{tr}\left(\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)$. Des versions linéarisées sont étudiées par exemple dans [Fra84] et la dimension 1 permet des modèles plus généraux encore (en théorie de grandes déformations par exemple), voir [Daf82 ; RSZ93 ; RZ97]. Comme le terme $B_1\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\mathrm{tr}\left(\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)$ qui apparaît dans le second membre de l'équation de conservation de l'énergie est *a priori* dans $L^1$ nous avons utilisé le cadre des solutions renormalisées pour les problèmes d'évolution à donnée $L^1$ développé dans [BM97 ; BMR01 ; BR98]. Nous établissons tout d'abord dans [G4] quelques propriétés de stabilité, compacité et des estimations de Boccardo-Gallouët en précisant la dépendance par rapport aux données. Ces propriétés nous permettent une approche du système par point fixe. Nous obtenons tout d'abord un résultat d'existence de petites solutions. En utilisant la structure du système et sous des conditions plus restrictives sur $f$, qui consistent à distinguer son comportement sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$, nous démontrons un résultat d'existence pour des données générales.

La mécanique des fluides est aussi une source de systèmes non linéaires avec des termes attendus dans $L^1$. C'est le cas des équations de Rayleigh-Bénard étudiées dans le livre [Lio96] qui couplent l'équation de Navier-Stokes et une équation de conservation de l'énergie. Dans [CFC97 ; CFC98] d'autres cas stationnaires ou d'évolution sont abordés tandis que des résultats d'existence et d'unicité pour des systèmes de Boussinesq sont démontrés dans [DG98]. Le modèle de Boussinesq est décrit dans [BMPT95] et l'équation de l'énergie comporte un terme de transport. Dans [G16] nous étudions le système de Boussinesq suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - 2\,\mathrm{div}\,(\mu(\theta)Du) + \nabla p = F(\theta) \qquad \text{dans } Q,$$
$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} + u\cdot\nabla b(\theta) - \Delta\theta = 2\mu(\theta)|Du|^2 \qquad \text{dans } Q.$$

Le fluide est supposé incompressible et des conditions initiales et sur le bord complètent les deux équations. La fonction $b$ est strictement croissante et vérifie $b' \geq \delta > 0$ sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction $F$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ vérifie une hypothèse de croissance. En utilisant le cadre usuel développé dans [Tem84] pour l'équation de Navier-Stokes et celui des solutions renormalisées pour la seconde équation nous donnons des résultats d'existence en dimension 2 et sous des hypothèses plus restrictives en dimension 3. Afin d'améliorer le type de croissance admissible de la fonction $F$, nous démontrons des résultats de régularité découplée en temps et en espace, du type $\theta \in L^r(0,T;L^q(\Omega))$, pour les solutions renormalisées de la deuxième équation. Les propriétés de stabilité et d'unicité des solutions renormalisées nous permettent alors de résoudre le système pour des données générales si $|F(r)| \leq a + M|r|^\alpha$ pour $0 < 2\alpha \leq 1$ et de petites solutions si $1 < 2\alpha < 3$.

# 1 Unicité de la solution de problèmes elliptiques

**Travaux** [G3 ; G5 ; G8 ; G9 ; G11 ; G15]

Nous décrivons dans ce chapitre nos contributions à la question de l'unicité de la solution d'équations elliptiques à donnée mesure et à donnée $L^1$.

## 1.1 Donnée mesure

Considérons l'équation elliptique à donnée mesure

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,Du)) = \mu & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dans le cas linéaire Stampacchia a défini dans [Sta65] la notion de « solution par transposition » qui permet d'obtenir l'existence et l'unicité d'une telle solution. Pour $p = 2$ et des équations du type $-\operatorname{div}(a(x,Du)) = \mu$, cette notion se généralise au cas non linéaire (voir [Mur94]) et, l'existence et l'unicité de la solution obtenue comme limite d'approximations est prouvée dans [Mur94]. Dans [DG01 ; DV09] l'unicité de la SOLA est démontrée pour une classe d'opérateurs du type $a(x,r,\xi)$. Enfin pour le $N$-laplacien les auteurs de [DHM00 ; GIS97] obtiennent l'unicité en précisant la classe des solutions faibles considérées.

Dans le cas général $p < N$ et le cadre des solutions renormalisées, les auteurs démontrent dans [DMMOP99] un résultat partiel d'unicité, à savoir un résultat d'unicité pour des solutions dites comparables : si $u$ et $v$ sont deux solutions renormalisées telles que $u - v$ appartient à $L^\infty(\Omega)$ alors $u = v$. Dans [G5] j'ai affaibli cette condition : d'une part en imposant une condition seulement sur $(u-v)^-$ (la partie négative de $u - v$) et d'autre part en la localisant à un voisinage de l'ensemble où $\mu$ est singulière. Ce résultat concerne l'équation (1.1) où, comme dans [DMMOP99], l'opérateur $a$ est supposé être de type Leray-Lions, fortement monotone, lipschitzien si $p \geq 2$ et höldérien si $1 < p < 2$.

La grande difficulté dans le cas des données mesures provient de l'exploitation de la condition dite à l'infini. Plus précisément d'après [FST91 ; BGO96] $\mu$ se décompose en $\mu = f - \operatorname{div}(g) + \lambda^+ - \lambda^-$, où $f \in L^1(\Omega)$, $g \in (L^{p'}(\Omega))^N$ et où $\lambda^+$ et $\lambda^-$ sont deux mesures positives qui sont concentrées respectivement sur deux ensembles boréliens disjoints $E^+$ et $E^-$ inclus dans $\Omega$ et de $p$-capacité nulle (la mesure $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ est donc singulière par rapport à la $p$-capacité). La définition de solution renormalisée consiste en une condition de régularité :

$$\text{pour tout } k > 0,\ T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega); \tag{1.2}$$

une équation vérifiée pour une certaines catégorie de fonctions tests qui ne « voient » que les zones où $u$ est bornée : pour tout $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ avec $h'$ à support compact et tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega h(u)a(x,Du)\cdot D\varphi dx + \int_\Omega h'(u)a(x,Du)\cdot Du\varphi dx = \int_\Omega fh(u)\varphi dx + \int_\Omega g\cdot D(h(u)\varphi)dx. \quad (1.3)$$

Formellement cette équation revient à utiliser la fonction test $h(u)\varphi$ car on démontre que $h(u)$ vaut 0 là où la mesure $\mu$ est singulière. Comme les fonctions $h$ sont à support compact il manque une information sur les ensembles $\{|u| > a\}$. Ceci est pallié par une condition dite à l'infini : si $\varphi \in W^{1,r}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $r > N$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n<u<2n\}} a(x,Du)\cdot Du\varphi dx = \int_\Omega \varphi d\lambda^+ \quad (1.4)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\{-2n<u<-n\}} a(x,Du)\cdot Du\varphi dx = \int_\Omega \varphi d\lambda^-. \quad (1.5)$$

Ces quatre points constituent la définition d'une solution renormalisée de l'équation (1.1). Dans [DMMOP99] les auteurs donnent 3 autres définitions équivalentes.

Donnons quelques détails sur les difficultés liées à l'unicité. Compte tenu des questions de régularité et des techniques usuelles, si $u$ et $v$ sont deux solutions renormalisées de (1.1), comme pour les données $L^1$, l'idée première consiste à justifier par approximation l'utilisation de la fonction test $T_k(u-v)$ dans la différence des deux équations. Ainsi on espère obtenir, pour tout $k > 0$,

$$\int_\Omega \big(a(x,Du) - a(x,Dv)\big)\cdot DT_k(u-v)dx = 0 \quad (1.6)$$

et la stricte monotonie suffirait alors à obtenir $u = v$. Une méthode consiste à prendre comme fonction test $h_n(u)h_n(v)T_k(u-v)$ où $h_n(r) = \big(n - T_n^+(|r|-n)\big)/n$ et de passer à la limite quand $n$ tend vers l'infini. Pour obtenir (1.6) il est alors nécessaire de contrôler quand $n$ tend vers l'infini des termes comme

$$\begin{aligned}\int_\Omega h_n'(u)h_n(v)a(x,Du)\cdot DuT_k(u-v)dx \\ = -\frac{1}{n}\int_{\{n<u<2n\}} h_n(v)a(x,Du)\cdot DuT_k(u-v)dx \\ + \frac{1}{n}\int_{\{-2n<u<-n\}} h_n(v)a(x,Du)\cdot DuT_k(u-v)dx\end{aligned} \quad (1.7)$$

ou au moins de les comparer à leur équivalent en $v$. Or comme le champ $h_n(v)T_k(u-v)$ n'appartient pas *a priori* à $W^{1,q}(\Omega)$ avec $q > N$, les propriétés (1.4) et (1.5) ne permettent pas de conclure. D'autres tentatives conduisent à la même difficulté. L'hypothèse « solutions comparables » introduite dans [DMMOP99], $u - v \in L^\infty(\Omega)$, permet de comparer entre eux des termes comme (1.7). Les auteurs démontrent alors sous cette hypothèse de comparabilité et pour un opérateur $a(x,\xi)$ fortement monotone un résultat d'unicité.

Dans [G5] j'ai établi le résultat suivant.

**Théorème 1.1.** *Soient $u$, $v$ deux solutions renormalisées de (1.1) relativement à $\mu$ et soit $E$ l'ensemble de $p$-capacité nulle sur lequel est concentré la partie singulière de la mesure de $\mu$ par rapport à la $p$-capacité. S'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ tel que $E \subset \mathcal{U} \subset \Omega$ et si $(u-v)^- \in L^\infty(\mathcal{U})$ (ou si $(u-v)^+ \in L^\infty(\mathcal{U})$) alors $u = v$.*

La preuve est liée à un choix (convenable mais technique) de fonction test. L'originalité vient de l'utilisation des fonctions « cut-off » qui sont à la base de la démonstration de l'existence dans [DMMOP99], c.-à-d. des fonctions régulières qui se concentrent sur les ensembles $E^+$ et $E^-$ et qui dans notre cas particulier sont à support compact dans $\mathcal{U}$. Ces fonctions sont essentielles pour affaiblir la condition $u-v$ dans $L^\infty$ à $(u-v)^-$ dans $L^\infty$.

**Remarque 1.2.** Il reste qu'il ne s'agit que d'un résultat partiel car obtenu pour des solutions $u$ et $v$ « comparables », et non générales. L'unicité de la solution pour un problème à donnée mesure reste une question ouverte aujourd'hui et pourrait dépendre de propriétés complémentaires sur le comportement des solutions « près » de $E^+$ et $E^-$ .

## 1.2 Donnée $L^1$ ou $L^1 + W^{-1,p'}$

Dans cette section nous considérons une équation elliptique avec éventuellement un terme d'ordre 0 :

$$\begin{cases} \lambda(x,u) - \operatorname{div}(a(x,u,Du) + \varphi(u)) = f - \operatorname{div}(g) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

La fonction $f$ appartient à $L^1(\Omega)$, $g$ est un élément de $(L^{p'}(\Omega))^N$ et $\lambda(x,s)$ est une fonction de Carathéodory vérifiant la condition de signe $\lambda(x,s)s \geq 0$.

### 1.2.1 État actuel de la situation pour ce type de problèmes.

Dans le cas variationnel, c.-à-d. pour des données dans $W^{-1,p'}(\Omega)$, la question de l'unicité et plus généralement les principes de comparaison sont abordés par exemple dans les travaux [Art86 ; CC85 ; CM89 ; BGM92 ; AC96]. Pour l'équation (1.8), selon la présence ou non du terme $\lambda(x,u)$, la dépendance ou non par rapport à $u$ de l'opérateur $a(x,u,Du)$ et la présence ou non du terme $\varphi(u)$, les hypothèses suffisantes pour obtenir l'unicité tout comme les méthodes pour obtenir ces résultats varient.

Si $\lambda(x,s)$ est strictement monotone la solution est unique si $a(x,s,\xi)$ et $\varphi(s)$ vérifient des conditions globales de type Lipschitz par rapport à $s$ (ou encore un contrôle global et fort du module de continuité). Dans ce cas, comme la fonction $\lambda(x,s)$ est strictement monotone, le terme $\lambda(x,u) - \lambda(x,v)$ est d'une certaine façon à la source de l'unicité. La preuve consiste, via un choix de fonction de test et par passage à la limite, à démontrer que

$$\int_\Omega |\lambda(x,u) - \lambda(x,v)| dx = 0, \tag{1.9}$$

ce qui entraîne $u = v$ presque partout.

Si $\lambda(x,s)$ est seulement monotone, l'égalité précédente n'entraîne plus l'unicité de la solution. C'est le terme $-\operatorname{div}(a(x,u,Du) - a(x,v,Dv))$ qui sera alors à la source de l'unicité. Sans la présence du terme $-\operatorname{div}(\varphi(u))$ et pour $a(x,s,\xi) = a(x,\xi)$ la monotonie stricte suffit. Dans le cas contraire si l'opérateur $a$ est fortement monotone et si les fonctions $a(x,s,\xi)$ et $\varphi(s)$ vérifient des conditions globales de type Lipschitz par rapport à $s$ (ou encore un contrôle global et fort du module de continuité) et si $1 < p \leq 2$ il y a unicité de la solution. Dans le cas d'un problème quasi-linéaire la méthode consiste à démontrer que

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{k^2} \int_\Omega |DT_k(u-v)|^2 dx = 0, \tag{1.10}$$

car l'inégalité de Poincaré appliquée à l'élément $T_k(u-v)$ de $H_0^1(\Omega)$ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à la suite $|T_k(u-v)|/k$ qui converge vers $\mathbb{1}_{\{|u-v|>0\}}$ quand $k$ tend vers 0 entraînent alors que

$$\int_\Omega \mathbb{1}_{\{|u-v|>0\}} dx = 0, \tag{1.11}$$

soit $u = v$ presque partout.

Dans le résultat précédent la condition $1 < p \leq 2$ est capitale car dans [BGM92] les auteurs exhibent un contre exemple pour $p > 2$. Cette limitation pour des opérateurs du type $a(x,s,\xi) = a(x,s)|\xi|^{p-2}\xi$ est due au caractère dégénéré par rapport à $\xi$ en 0 pour $p > 2$. Des résultats partiels ont été obtenus dans [CDMP07] pour une classe de problèmes pseudo-monotones ($a(x,s,\xi) = a(x,s)|\xi|^{p-2}\xi$ et $\varphi \equiv 0$), $p > 2$ et des seconds membres positifs. Avec la présence du terme $-\operatorname{div}(\varphi(u))$, il est encore possible d'obtenir des résultats d'unicité pour une classe d'opérateurs à croissance $p$ ($p > 2$) qui ne dégénèrent pas en 0, comme $a(x,s,\xi) = (1+|\xi|^2)^{(p-2)/2}\xi$.

Concernant les données $L^1$ la situation est plus favorable à l'existence et à l'unicité que pour les données mesures. Pour l'existence d'une solution renormalisée nous supposons que $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}^N$, $\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^N$ sont des fonctions de Carathéodory telles que pour $1 < p \leq N$ :

$$\exists \alpha > 0, \quad a(x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall s \in \mathbb{R}, \ \text{p.p. dans } \Omega; \tag{1.12}$$

$$\big(a(x,s,\xi) - a(x,s,\xi')\big)\cdot(\xi - \xi') \geq 0 \ \ \forall \xi,\xi' \in \mathbb{R}^N, \ \text{p.p. dans } \Omega; \tag{1.13}$$

pour tout $k > 0$ il existe $d_k \in L^{p'}(\Omega)$ vérifiant

$$|a(x,s,\xi)| \leq \beta(|d_k(x)| + |\xi|^{p-1}) \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall |s| \leq k, \ \text{p.p. dans } \Omega; \tag{1.14}$$

pour la fonction $\lambda$,

$$\lambda(x,s)s \geq 0 \ \ \forall s \in \mathbb{R}, \ \text{p.p. dans } \Omega; \tag{1.15}$$

pour tout $k > 0$ il existe $c_k > 0$ vérifiant

$$\big|\lambda(x,s)\big| \leq c_k \ \ \forall |s| \leq k, \ \text{p.p. dans } \Omega. \tag{1.16}$$

Il est connu que, sous ces hypothèses, les techniques développées dans les travaux [BG89 ; Mur93 ; Mur94 ; LM ; Boc96 ; BBGGPV95 ; BM97 ; DMMOP99] permettent de démontrer l'existence d'une solution renormalisée. Comme les hypothèses de contrôle par rapport à $s$ des fonctions $\lambda(x,s)$, $\varphi(s)$ et $a(x,s,\xi)$ sont assez générales, la solution renormalisée n'est pas *a priori* une solution au sens des distributions : le champ $\varphi(u)$ n'a pas de raison d'appartenir à $L^1_{loc}(\Omega)$

par exemple. Sous ces hypothèses assez générales sur $a$, $\lambda$ et $\varphi$ et pour un second membre mesure nous ne savons pas si une solution renormalisée existe.

Concernant l'unicité de la solution renormalisée nous disposons depuis la fin des années 1990 d'assez peu de résultats pour les problèmes elliptiques, mais comparativement de plus de résultats pour les problèmes paraboliques (voir [BM97; BR98; BMR99; BMR01]).

Dans [Mur94] un des problèmes abordés est le problème elliptique monotone à donnée $L^1$ :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,Du)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si l'opérateur $a$ est strictement monotone la solution renormalisée est unique. La preuve consiste à justifier l'utilisation formelle de la fonction test $T_k(u-v)$ dans la différence des équations en $u$ et en $v$. Pour des solutions renormalisées on démontre que

$$\int_\Omega \big(a(x,Du)-a(x,Dv)\big)\cdot DT_k(u-v)\,dx = 0.$$

La différence par rapport à une donnée mesure (pour laquelle nous ne savons pas si ce résultat est vrai) provient de la condition dite à l'infini qui s'écrit pour cette équation à donnée $L^1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_{\{n<|u|<2n\}} a(x,Du)\cdot Du\,dx = 0. \tag{1.17}$$

En effet par rapport à (1.4) et (1.5) il n'y a pas de partie singulière, donc $d\lambda^+ = d\lambda^- = 0$. Cette propriété est beaucoup plus exploitable et est capitale pour obtenir les résultats d'unicité dans les problèmes elliptiques.

Dans [Mur93] l'auteur étudie le problème

$$\begin{cases} \lambda u - \operatorname{div}(A(x)Du + \varphi(u)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $f \in L^1(\Omega)$. Des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution renormalisée sont établis. Pour l'unicité on suppose que $\lambda > 0$ et que $\varphi$ est localement lipschitzienne.

### 1.2.2 Apport dans ce domaine

Nous décrivons maintenant mes contributions à ces questions d'unicité. Nous supposerons désormais que

$$f \in L^1(\Omega), \quad g \in L^{p'}(\Omega)^N. \tag{1.18}$$

En collaboration avec Mohsen Ben Cheikh Ali nous étudions dans [G3; G9] ([G9] contient quelques améliorations par rapport aux résultats annoncés dans [G3]) une classe de problèmes non coercifs à données $L^1$ et avec des conditions mixtes (Dirichlet et Neumann) sur le bord. Nous donnons des résultats d'existence et d'unicité qui seront décrits dans le chapitre sur les problèmes non coercifs. Les deux théorèmes d'unicité concernent aussi cette partie. En effet, comme écrit la remarque 4.4, la preuve du théorème 4.1 de [G9] s'applique à la classe de problème elliptique

$$\begin{cases} \lambda(x,u) - \operatorname{div}(a(x,Du) + \varphi(u)) = f - \operatorname{div}(g) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.19}$$

pour lequel nous obtenons le résultat d'unicité suivant.

**Théorème 1.3.** *Sous les hypothèses* (1.12)–(1.16) *et* (1.18), *si la fonction* $\lambda(x,s)$ *est strictement monotone et si la fonction* $\varphi$ *est localement lipschitzienne, alors la solution renormalisée de* (1.19) *est unique.*

La preuve de ce théorème consiste, si $u$ et $v$ désignent deux solutions renormalisés de (1.19), à utiliser pour l'équation en $u$ la fonction test $h_n(u)T_k(u-v)/k$, pour l'équation en $v$ la fonction test $h_n(v)T_k(u-v)/k$. On effectue alors deux passages à la limite, d'abord quand $k$ tend vers 0, puis quand $n$ tend vers l'infini. L'ordre est important : à $n$ fixé, comme la fonction $h_n$ est à support compact, les intégrales en jeu ne « voient » que les zones où les fonctions $u$ et $v$ sont dans un compact. Ceci permet d'utiliser l'hypothèse localement lipschitzienne sur $\varphi$ et de passer à la limite quand $k$ tend vers 0. Par passage à la limite en $n$, en utilisant la monotonie de $a$, de $\lambda$ et la condition à l'infini de la solution renormalisée on obtient

$$\int_\Omega |\lambda(x,u)-\lambda(x,v)|dx = 0.$$

La stricte monotonie de $\lambda$ permet de conclure.

« Que dire si $\lambda$ est seulement monotone ? » est une question naturelle pour l'équation (1.19). Vu les résultats connus pour le cas variationnel nous nous sommes limités dans [G9] à des opérateurs $a$ fortement monotones et à croissance $p$ pour $1<p\le 2$ (le cas $p=2$ était annoncé et l'idée de la preuve décrite dans [G3]). Nous démontrons dans [G9] le théorème suivant

**Théorème 1.4.** *Pour* $1<p\le 2$, *sous les hypothèses* (1.12)–(1.16) *et* (1.18), *si l'opérateur* $a$ *est fortement monotone, c.-à-d. si*

$$(a(x,\xi)-a(x,\xi'))\cdot(\xi-\xi') \ge \alpha\frac{|\xi-\xi'|^2}{(|\xi|+|\xi'|)^{2-p}} \qquad \forall \xi,\xi'\in\mathbb{R}^N, \quad a.e.\ x\in\Omega,$$

*et s'il existe* $L>0$ *et* $\gamma<p-\frac{3}{2}$ *tels que*

$$|\varphi(r)-\varphi(r')|\le L|r-r'|(|r|+|r'|+1)^\gamma \quad \forall r,r'\in\mathbb{R},$$

*alors la solution renormalisée de* (1.19) *est unique.*

Comme pour le cas variationnel, nous imposons une condition globale sur $\varphi$. Par rapport au cas précédent, comme $\lambda$ est seulement monotone, la preuve consiste à utiliser $h_n(u)T_k(u-v)/k^2$ et à passer à la limite d'abord en $n$ puis en $k$. D'où la nécessité d'une condition globale sur $\varphi$. Par rapport au cas variationnel il y a une petite subtilité due au manque de régularité. Nous démontrons que

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k^2}\int_\Omega \frac{|DT_k(u-v)|^2}{\big(|Du|+|Dv|\big)^{2-p}}dx = 0 \tag{1.20}$$

mais comme $T_k(u-v)$ n'est pas sensé appartenir à $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ni à un espace de Sobolev d'exposant proche de 1), nous ne pouvons pas utiliser telle quelle la méthode de [BGM92]. La conclusion se fait en deux temps, en utilisant une fois encore la condition à l'infini. Comme la fonction $h_n(u)T_k(u-v)/k$ appartient à $W_0^{1,1}(\Omega)$ nous obtenons grâce à l'inégalité de Poincaré, passage à la limite en $k$ avec (1.20) puis en $n$ avec la condition à l'infini que $u=v$ presque partout dans $\Omega$.

En collaboration avec Dominique Blanchard et François Désir nous avons étudié dans [G8] une classe de problèmes quasi–linéaires dégénérés à données $L^1$. Nous donnons un théorème d'existence (qui sera décrit dans le chapitre consacré aux problèmes à matrice de diffusion qui dégénère à l'infini ou qui explose à distance finie) et un théorème d'unicité qui trouve aussi sa place dans cette partie. Le problème quasi–linéaire

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x,u)Du) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.21}$$

avec $f \in L^1(\Omega)$ et $A(x,s)$ une matrice symétrique uniformément coercive est un cas particulier du problème étudié dans [G8]. Nous démontrons un résultat assez général qui donne une condition suffisante sur $A(x,s)$ pour obtenir l'unicité de la solution renormalisée : s'il existe une fonction $\varphi$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie une hypothèse technique (voir [G8]) par rapport à $A(x,\cdot)$, alors la solution renormalisée est unique.

Nous donnons ensuite une hypothèse assez simple sur le module de continuité de $A(x,\cdot)$ et une inégalité différentielle qui permettent de construire une fonction $\varphi$ vérifiant cette hypothèse technique. Ceci permet d'énoncer le théorème suivant.

**Théorème 1.5.** *Supposons qu'il existe une fonction $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que*

$$w \geq 0, \tag{1.22}$$

$$\exists \eta > 0, \exists C_1 > 0 \quad |w'| \leq C w^{1+\eta}, \tag{1.23}$$

$$\left|A(x,s) - A(x,t)\right| \leq \left|\int_s^t w(z)\,dz\right| \quad \forall s,t \in \mathbb{R},\ p.p.\ x \in \Omega. \tag{1.24}$$

*Alors la solution renormalisée de* (1.21) *est unique.*

Les conditions (1.22)–(1.24) sont très générales et étendent les résultats connus dans le cas variationnel ([CM89 ; BGM92]). La matrice $A$ peut avoir de fortes croissances ou de fortes oscillations pourvu qu'elles soient contrôlées par la fonction $w$. Par exemple la matrice $A$ définie par

$$A(x,s) = \left(1 + b(x)\exp(s)\sin^2\left(\exp(s^2)\right)\right)B(x)$$

avec $b$ une fonction positive de $L^\infty(\Omega)$ et $B$ une matrice symétrique et coercive à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ vérifie les conditions (1.22)–(1.24).

Des résultats similaires ont été prouvés dans le cadre (équivalent) des solutions entropiques dans [Por04] pour une classe de problèmes à données $L^1$ : le module de continuité de la matrice $A(x,s)$ par rapport $s$ ainsi que sa la croissance par rapport à $s$ sont majorés par la fonction exponentielle (du type $\exp(\mu|s|)$).

Pour démontrer le théorème 1.5 nous construisons tout d'abord une fonction $\varphi$ vérifiant l'hypothèse technique relative à la matrice $A$. Ensuite, si $u$ et $v$ sont deux solutions renormalisées de (1.21), les techniques de troncature et la condition à l'infini permettent de démontrer que

$$\lim_{k\to 0} \int_\Omega \frac{1}{\varphi'(u)\varphi'(v)} \left|DT_k(\varphi(u) - \varphi(v))\right|^2 dx = 0. \tag{1.25}$$

Par rapport à la régularité de nos solutions renormalisées, il est important de remarquer que la fonction $\frac{1}{\varphi'(u)\varphi'(v)}\left|DT_k(\varphi(u) - \varphi(v))\right|^2$ n'a aucune raison *a priori* d'appartenir à $L^1(\Omega)$.

Comme dans [G9] on obtient alors l'unicité en deux temps en utilisant l'inégalité de Poincaré appliquée à la fonction $h_n(u)(T_k(\varphi(u)) - T_k(\varphi(v)))$ qui appartient à $W_0^{1,1}(\Omega)$ (passage à la limite quand $k$ tend vers 0) puis la condition à l'infini (passage à la limite $n$ tend vers l'infini).

Une fois obtenus les résultats d'unicité de [G8] les deux questions suivantes sont tout à fait naturelles :

- avons nous des résultats similaires à ceux obtenus pour (1.21) pour des opérateurs à croissance $p$ (avec $1 < p < 2$) ?
- que dire du cas (réellement) localement Lipschitz ? (mêmes générales, les hypothèses données dans [Por04] ou [G8] sont en effet globales)

J'ai étudié la première question dans [G15] dans lequel est énoncé un théorème d'unicité pour la classe d'équations elliptiques

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u)|Du|^{p-2}Du + \Phi(u)) = f - \mathrm{div}(g) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.26}$$

où $a(x,s)$ est une fonction de Carathéodory à valeurs réelles satisfaisant $0 < \alpha \le a(x,s) < +\infty$ et $\Phi$ une fonction continue définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$. Le second membre $f - \mathrm{div}(g)$ appartient à $L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ et bien sûr nous supposons $1 < p \le 2$. Sous ces hypothèses il est connu qu'une solution renormalisée existe.

Les méthodes introduites dans [G8] se généralisent. J'ai obtenu le résultat d'unicité suivant

**Théorème 1.6.** *Supposons qu'il existe une fonction $w \in C^1(\mathbb{R})$ telle que*

$$\begin{gathered} w \ge 0, \\ \exists \eta > 0, \exists C_1 > 0 \quad |w'| \le C_1 w^{1+\eta}, \\ \big|a(x,s) - a(x,t)\big| \le \Big|\int_s^t w(z)\,dz\Big|, \quad \forall s,t \in \mathbb{R}, \textit{ presque partout dans } \Omega, \\ \big|\Phi(s) - \Phi(t)\big| \le \Big|\int_s^t w(z)\,dz\Big|, \quad \forall s,t \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

*Alors la solution renormalisée de (1.26) est unique.*

Comme dans [G8], ces résultats d'unicité sont nouveaux dans le cas des données $L^1 + W^{-1,p'}$ mais aussi dans le cas des données $W^{-1,p'}$ et des solutions variationnelles. La démonstration du théorème s'appuie sur la construction d'une fonction $\varphi$ qui contrôle d'une certaine façon les coefficients de Lipschitz des fonctions $a$ et $\Phi$. Cette fonction $\varphi$ étant construite on démontre un résultat analogue à (1.25)

$$\lim_{K\to 0} \frac{1}{k^2} \int_\Omega \Big( \frac{1}{(\varphi'(u))^{p-1}} + \frac{1}{(\varphi'(v))^{p-1}} \Big) \frac{\big|DT_k(\varphi(u) - D\varphi(v))\big|^2}{(|D\varphi(u)| + |D\varphi(v)|)^{2-p}}\,dx = 0,$$

qui permet de conclure (en deux temps) que $u = v$.

**Remarque 1.7.** Dans [G8 ; G15] avoir des opérateurs du type $A(x,u)Du$ ou $a(x,u)|Du|^{p-2}Du$ permet d'écrire au moins formellement que

$$\begin{gathered} A(x,u)Du \times \varphi'(u) = A(x,u)D\varphi(u), \\ a(x,u)|Du|^{p-2}Du \times \varphi'(u)^{p-1} = a(x,u)|D\varphi(u)|^{p-2}D\varphi(u), \end{gathered}$$

ce qui d'une certaine façon facilite les manipulations sur les expressions.

La deuxième question était celle d'obtenir un résultat avec une hypothèse vraiment locale. Les techniques développées dans [G8 ; G15] et [Por04] sont des extensions de celles développées [CC85 ; CM89 ; BGM92] avec la vision « solution renormalisée » ou « solution entropique ». Elles semblent dans tous les cas demander une hypothèse globale sur $A(x,s)$ et $\Phi$. Dans [CC85] (voir aussi [CM89]) les auteurs donnent plusieurs résultats d'unicité, dont l'un concerne l'équation elliptique quasi-linéaire $-\mathrm{div}(A(x,u))=f$ où la matrice $A(x,s)$ est hölderienne de rapport plus grand que $1/2$ et est régulière en la variable $x$ (les coefficients de $A(x,s)$ sont dans $W^{1,\infty}$). Le fait d'atteindre une dépendance höldérienne en $s$ se paie par une régularité accrue par rapport à $x$.

Dans [G11] je démontre que cette condition est aussi le prix à payer pour obtenir des résultats d'unicité sous des hypothèses réellement locales, ce qui étend des résultats de [CC85] et donne de nouveaux résultats d'unicité dans le cadre des équations elliptiques à donnée $L^1+W^{-1,p'}$. Considérons l'équation

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(A(x,u)Du)=f+\mathrm{div}(g) & \text{dans } \Omega,\\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}\tag{1.27}$$

On suppose que $A:\Omega\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^{N\times N}$ est une fonction de Carathéodory

$$\exists\alpha>0,\quad A(x,s)\xi\cdot\xi\geq\alpha|\xi|^2,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^N,\ \forall s\in\mathbb{R},\ \text{p.p. dans } \Omega\,;\tag{1.28}$$

$$\forall K>0,\quad \exists C_K>0\quad |A(x,s)|\leq C_K,\quad \forall s\in[-K,K],\ \text{p.p. dans } \Omega.\tag{1.29}$$

En notant $A(x,s)=(A_{ij}(x,s))_{1\leq i,j\leq N}$, on suppose de plus que pour tout $r$ dans $\mathbb{R}$ et tout $1\leq i,j\leq N$, la fonction $A_{ij}(r,\cdot)$ appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$ et il existe $M>0$ tel que

$$\Big|\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}(x,r)\Big|\leq M\sum_{1\leq i,j\leq N}A_{i,j}(x,r),\quad \forall r\in\mathbb{R},\ \forall 1\leq i,j\leq N,\ \text{p.p. dans } \Omega.\tag{1.30}$$

Concernant le module de continuité de $A(x,s)$ par rapport $s$ nous supposons que pour tout $K>0$ il existe une fonction positive et croissante $\omega_K$ telle que

$$|A(x,s)-A(x,r)|\leq\omega_K(|s-r|)\quad \forall r,s\in\mathbb{R}\text{ avec } |s|\leq K,\ |r|\leq K,\ \text{p.p. dans } \Omega\,;\tag{1.31}$$

$$\int_{0^+}\frac{ds}{\omega_K^2(s)}=+\infty.\tag{1.32}$$

Cette hypothèse est locale. En particulier toute matrice de diffusion dont les coefficients sont localement höldériens de rapport plus grand que $1/2$ la vérifie.

**Théorème 1.8.** *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $f\in L^1(\Omega)$ et tout $g\in(L^{p'}(\Omega))^N$ la solution renormalisée de* (1.27) *est unique.*

La preuve de ce résultat consiste à mélanger les techniques développées dans [CC85 ; CM89] dans le cas d'une matrice dont les coefficients sont höldériens et celles des solutions renormalisées et des troncatures. Elle repose sur le lemme suivant.

**Lemme 1.9.** *Soient $u$ et $v$ deux solutions renormalisées de* (1.27)*. Pour toute fonction $\varphi$ appartenant à $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\{u-v>0\}}\big(h_n(u)A(x,u)Du-h_n(v)A(x,v)Dv\big)\cdot D\varphi\,dx=0.\tag{1.33}$$

Ce lemme est une « version tronquée » du théorème 4 de [CC85] dans lequel la fonction $h_n$ n'apparaît pas. La preuve est basée sur des fonctions tests du type $h_n(u)T_k(u-v)\varphi/k$. Comme le passage à limite s'effectue d'abord quand $k$ tend vers 0, les équations considérées ne « voient » que les zones où $u$ et $v$ sont dans un compact, d'où l'hypothèse locale sur $A$. Une fois ce lemme démontré, la preuve du théorème 1.8 repose sur un choix judicieux de la fonction $\varphi$ et sur une formule d'intégration par parties.

**Remarque 1.10.** Les théorèmes d'unicité des travaux [G8 ; G9 ; G11 ; G15] énoncés précédemment ont leurs équivalents en terme de principe de comparaison.

**Remarque 1.11.** Les articles [Por04] et [G8 ; G11 ; G15] donnent non seulement des théorèmes d'unicité pour les données $L^1$ mais améliorent aussi les résultats connus dans le cadre variationnel (par exemple dans [CC85 ; CM89 ; BGM92]). Les techniques « des données $L^1$ » apportent ainsi une contribution nouvelle même dans le cadre variationnel.

## 1.3 Perspectives

L'unicité pour une donnée mesure semble une question très difficile. De la même façon, comme la technique employée dans [G11] est limitée au cas quasi–linéaire, il paraît difficile d'échapper à une condition globale pour des équations du type $-\mathrm{div}(a(x,u)|Du|^{p-2}Du) = f$, ce qui laisse ouvert le problème de l'unicité sous des conditions locales pour ce problème.

Une question plus abordable serait, avec les méthodes développées dans [G8 ; G15], d'étudier l'unicité pour des données $L^1$ et

- des opérateurs à croissance $p$ avec $1 < p \leq 2$ non linéaires plus généraux que $a(x,s)|\xi|^{p-2}\xi$,
- des opérateurs à croissance $p$ avec $p > 2$ non dégénérés en 0, comme par exemple l'opérateur $a(x,s)(1+|\xi|^2)^{(p-2)/2}\xi$.

La difficulté principale tient au fait qu'alors $a(x,u,Du)\varphi'(u) \neq a(x,u,D\varphi(u))$ comme dans [G8 ; G15], ce qui complique notablement la méthode.

# 2 Problèmes non coercifs

**Travaux** [G3 ; G9 ; G10 ; G12 ; G13 ; G17]

DANS ce chapitre nous étudions des problèmes non linéaires et non coercifs stationnaires ou d'évolution.

## 2.1 Un premier problème

J'ai commencé à travailler sur ce thème, juste après mon doctorat, avec Mohsen Ben Cheikh Ali qui était alors étudiant en thèse. Dans [G3 ; G9] nous nous intéressons à l'existence et l'unicité d'une solution du problème modèle

$$\lambda u|u|^{p-2} - \Delta_p u - \operatorname{div}\big(c(x)|u|^{p-2}u\big) = f \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.1}$$
$$\big(|Du|^{p-2}Du + c(x)|u|^{p-2}u\big)\cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1, \tag{2.2}$$
$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_0; \tag{2.3}$$

où $\Omega$ est domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Lipschitz ($N \geq 2$), $\Gamma_0$ et $\Gamma_1$ sont tels que $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$ et $|\Gamma_0| > 0$, $\mathbf{n}$ désigne le vecteur unitaire normal extérieur à $\Omega$, $f \in L^1(\Omega)$, $\lambda \geq 0$, $\Delta_p$ désigne le $p$-laplacien et la fonction $c(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ est dans un espace de Lebesgue approprié.

L'étude de ce problème est motivée pour $p = 2$ par l'homogénéisation d'un domaine perforé avec des conditions de Neumann sur le bord des trous et de Dirichlet sur le bord extérieur (*voir* [BCA01]) et un second membre $L^1$. Dans la note [G3] nous annonçons les résultats principaux pour une classe d'équations plus générales (le $p$-laplacien est remplacé par un opérateur monotone non linéaire à croissance $p$ et $c(x)|u|^{p-2}u$ par une fonction de Carathéodory $\Phi(x,u)$ avec une hypothèse de croissance en $c(x)|u|^{p-1}$), l'article [G9] contient quelques améliorations pour l'unicité.

Dans la suite nous supposerons que $\Gamma_1 = \varnothing$ car la difficulté réside plus dans la dépendance en $x$ du terme $c(x)|u|^{p-2}u$ ainsi que dans sa croissance par rapport à $u$ que dans la condition de Neumann sur le bord.

La principale difficulté pour résoudre (2.1)–(2.3) tient à la non coercivité de l'opérateur. En effet si $c$ est une fonction dans $(L^{N/(p-1)}(\Omega))^N$ ($p < N$), les inégalités de Sobolev montrent que l'opérateur $u \mapsto -\Delta_p u - \operatorname{div}\big(c(x)|u|^{p-2}u\big)$ est bien défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ mais n'est pas coercif en général, sauf si $c$ est suffisamment petit.

Des problèmes non coercifs similaires, pour des conditions aux limites de Dirichlet et avec la présence d'un terme supplémentaire du type $H(x, Du)$ dans l'équation (2.1), ont fait l'objet de résultats d'existence avec un second membre $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, $N > p$ dans [DVP95] par la méthode de symétrisation, ou sous des conditions plus restrictives sur le terme de type $-\operatorname{div}(c(x)|u|^{p-2}u)$ pour un second membre mesure dans [Lia92]. Parallèlement dans [Dron02] est étudiée la version linéaire de (2.1) avec des condition mixtes ainsi que le problème dual : pour un second membre régulier les questions d'existence, d'unicité et de régularité sont abordées et pour un second membre mesure l'auteur fait appel à la notion de solution par transposition. Une classe d'équations plus générales que (2.1) contenant en plus un terme du type $b(x)|Du|^\lambda$ est abordée dans le cas variationnel dans [DVP98] et avec une donnée mesure dans [DVP96] : l'existence d'une solution au sens des distributions pour $2-1/N<p<N$ est notamment démontrée dans le dernier article cité.

Nous avons choisi d'étudier le problème (2.1)–(2.3) dans le cadre des solutions renormalisées qui semblent particulièrement adaptées aux données $L^1$. Nous démontrons le résultat suivant formulé pour le cas modèle (2.1)–(2.3).

**Théorème 2.1.** *Soit $f\in L^1(\Omega)$. Si*

$$\begin{aligned} &\textit{pour } p<N, && c\in (L^{N/(p-1)}(\Omega))^N\\ &\textit{et pour } p=N, && \int_\Omega \big(1+|c|\big)^{N/(N-1)}\big(\ln(1+|c|)\big)^{N-1}dx<+\infty, \end{aligned} \tag{2.4}$$

*alors il existe au moins une solution renormalisée du problème* (2.1)–(2.3).

La preuve consiste à considérer un problème approché, à obtenir des estimations *a priori*, et à passer à la limite dans ce problème. Si $u^\varepsilon$ désigne une solution du problème approché, la principale difficulté tient aux estimations *a priori* : la clef est l'utilisation de la fonction test $\int_0^{u^\varepsilon}\frac{1}{(1+|s|)^p}ds$ qui donne une estimation sur $\ln(1+|u^\varepsilon|)$ (dite « estimation log »). Ce type d'estimation a été parallèlement utilisée dans [Boc] (voir aussi [Dron02]). Une des originalités par rapport aux travaux cités précédemment réside dans la condition donnée sur $c$ dans le cas $p=N$. Pour traiter ce cas nous utilisons le théorème d'injection de Sobolev dans le cas limite (théorème de Trudinger Moser) qui affirme que si $v\in W_0^{1,N}(\Omega)$ alors $\exp(|v|^{N/(N-1)})\in L^1(\Omega)$.

Comme cela a été déjà mentionné dans le chapitre précédent, nous donnons deux théorèmes d'unicité. Le premier (théorème 1.3 ci dessus) concerne le cas $\lambda>0$ (ou plus généralement $\lambda(x,s)$ strictement monotone), une classe d'opérateurs $a$ monotones et une hypothèse locale sur le terme sous la divergence. Dans le second (théorème 1.4 ci dessus) nous supposons que $\lambda\ge 0$, un opérateur fortement monotone et une hypothèse globale sur le terme sous forme divergencielle (et bien sûr $1<p\le 2$).

## 2.2 Équation elliptique avec deux termes d'ordre inférieur

Dans [BMMP03 ; BMMP02 ; BMMP05] les auteurs étudient des problèmes non coercifs du type (2.1)–(2.3) dans lesquels le terme $-\operatorname{div}(c(x)|u|^{p-2}u)$ est remplacé par $b(x)|Du|^\lambda$. L'opérateur $u\mapsto -\Delta_p u+b(x)|Du|^\lambda$ est également non coercif. Dans [BMMP03] des résultats d'existence de solution renormalisée pour un second membre mesure, et dans [BMMP02] la question de l'unicité de la solution renormalisée pour des données $L^1$ est abordée (le cas variationnel est étudié dans [BMMP05]).

Avec Anna Mercaldo nous avons étudié l'opérateur « complet », à savoir une classe d'équations dont le prototype est

$$\begin{cases} -\Delta_p u-\operatorname{div}(c(x)|u|^\gamma)+b(x)|Du|^\lambda=\mu-\operatorname{div}(F) & \text{dans } \Omega,\\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

où $1 < p < N$, $\mu$ est une mesure de Radon à variation bornée, $F \in (L^{p'}(\Omega))^N$, $0 \le \gamma \le p-1$, $0 \le \lambda \le p-1$. Les fonctions $c$ et $b$ sont respectivement dans les espaces de Lorentz $(L^{\frac{N}{p-1},r}(\Omega))^N$ $(r \le +\infty)$ et $L^{N,1}(\Omega)$.

Nous définissons dans [G10 ; G12] une notion de solution renormalisée de l'équation (2.5) et nous montrons l'existence d'une solution. On peut regrouper les énoncés de [G10 ; G12] sous la forme suivante.

**Théorème 2.2.** *Sous les hypothèses précédentes sur les données il existe une solution renormalisée de l'équation* (2.5) *dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée*

- $\lambda = \gamma = p-1$, $c \in (L^{\frac{N}{p-1},r}(\Omega))^N$ $(1 \le r < +\infty)$, $b \in L^{N,1}(\Omega)$ *et l'une des quantités* $\|b\|_{L^{N,1}(\Omega)}$ *ou* $\|c\|_{(L^{\frac{N}{p-1},r}(\Omega))^N}$ *suffisamment petite*
- $\lambda \le p-1$, $\gamma < p-1$, $c \in (L^{\frac{N}{p-1},+\infty}(\Omega))^N$ *et* $b \in L^{N,1}(\Omega)$
- $\lambda < p-1$, $\gamma = p-1$, $c \in (L^{\frac{N}{p-1},r}(\Omega))^N$ $(1 \le r < +\infty)$ *et* $b \in L^{N,1}(\Omega)$.

Dans le cas $\lambda = \gamma = p-1$ nous avons besoin de la petitesse de $c$ ou $b$, ce qui est en accord avec [Sta65 ; DVP98 ; DVP95]. La preuve de ces résultats d'existence consiste à considérer un problème approché, à obtenir des estimations *a priori* et à passer à la limite. Si $u_\varepsilon$ désigne une solution du problème approché, le point crucial est de démontrer une estimation de Boccardo-Gallouët ([BG89], voir [BMMP03] pour la version dans les espaces de Lorentz) : il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} \||Du_\varepsilon|^{p-1}\|_{L^{N',\infty}(\Omega} &\le C \\ \||u_\varepsilon|^{p-1}\|_{L^{N/(N-p),\infty}(\Omega)} &\le C. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Il est facile de voir que si $b$ et $c$ sont suffisamment petits, alors via les estimations de Boccardo-Gallouët les termes issus des équivalents approchés de $\operatorname{div}(c(x)|u|^{p-1})$ et $b(x)|Du|^{p-1}$ et de la fonction test $T_k(u_\varepsilon)$ seront finalement absorbés. Donnons quelques explications pour le cas $\lambda = \gamma = p-1$. Les fonctions tests menant aux estimations (2.6) sont différentes selon que l'on suppose $c$ suffisamment petit (traité dans [G12]) ou $b$ suffisamment petit (traité dans [G10]).

Pour $b$ suffisamment petit :

- nous utilisons une estimation de type logarithmique sur $u_\varepsilon$ (comme dans [G9]) qui donne une estimation de la mesure des ensembles de niveau $\{|u_\varepsilon| > A\}$ en fonction des données et de la quantité à estimer $\||Du_\varepsilon|^{p-1}\|_{L^{N',\infty}(\Omega)}$ ;
- cette estimation, l'équi-intégrabilité de $b$ et les estimations de Boccardo–Gallouët mènent à une inégalité du type

$$\||Du_\varepsilon|^{p-1}\|_{L^{N',\infty}(\Omega)} \le C\|b\|_{L^{N,1}(\Omega}\||Du_\varepsilon|^{p-1}\|_{L^{N',\infty}(\Omega)} + M,$$

  ce qui permet d'obtenir (2.6) ;
- il ne reste plus qu'à passer à la limite dans le problème approché via un théorème de stabilité pour les solutions renormalisées.

**Remarque 2.3.** L'équation (2.5) contient le terme $\operatorname{div}(c(x)|u|^{p-1})$ et le second membre est la somme d'une mesure de Radon à variation bornée et d'un terme dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. Ceci ne correspond pas exactement à la situation de l'article [DMMOP99]. Nous avons donc vérifié que nous pouvions démontrer un résultat de stabilité comparable à celui de [DMMOP99]. La preuve de ce résultat, placé dans l'annexe de [G10], utilise les mêmes fonctions « cut-off » mais est légèrement différente et plus courte.

Pour $c$ suffisamment petit, l'idée est tout d'abord d'écrire

$$Du_\varepsilon = \mathbb{1}_{\{|u_\varepsilon|\le m_1\}} Du_\varepsilon + \mathbb{1}_{\{|u_\varepsilon|>m_1\}} Du_\varepsilon.$$

Puis les étapes de la preuve consistent :

- pour $m_1$ dépendant de $\varepsilon$ et des données nous obtenons une estimation de la quantité $\|\mathbb{1}_{\{|u_\varepsilon|>m_1\}}|Du_\varepsilon|^{p-1}\|$ dans l'espace de Lorentz approprié ;
- l'estimation de $DT_{m_1}(u_\varepsilon)$ dépend alors de $\|\mathbb{1}_{\{|u_\varepsilon|>m_1\}}|Du_\varepsilon|^{p-1}\|$ et des données ;
- la clef de la preuve consiste alors à démontrer que $m_1$ est borné. Un choix très technique de fonctions tests en $u_\varepsilon$ qui ont tendance à « exploser » en $m_1$ et qui donnent une « estimation log » sur $u_\varepsilon$. Pour $c$ suffisamment petit nous obtenons la condition sur $m_1$

$$a_1 \le \frac{a_2}{m_1^{p-1}} + \frac{a_3}{m_1^p}$$

où les $a_i > 0$, $i \in \{1,2,3\}$, sont indépendants de $\varepsilon$ : on peut donc choisir $m_1$ borné indépendamment de $\varepsilon$. L'estimation (2.6) est démontrée ;
- le théorème de stabilité permet de conclure.

En ce qui concerne l'unicité pour l'opérateur complet (hormis le cas linéaire) il n'y avait pas, à notre connaissance, de résultat même dans le cas variationnel. Avec Anna Mercaldo, nous avons limité notre investigation au cas variationnel. Sachant que le $p$-Laplacien dégénère en 0 pour $p>2$, ce qui est un obstacle à l'unicité de $-\Delta_p u - \operatorname{div}(\varphi(u)) = f$, nous avons étudié dans [G13] cette question pour la classe modèle suivante

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big((1+|Du|^2)^{(p-2)/2}Du\big) - \operatorname{div}\big(\big(c(x)(1+|u|^2)^{(\tau+1)/2}\big) \\ \qquad\qquad + b(x)(1+|Du|^2)^{(1+\sigma)/2} = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \qquad\qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{2.7}$$

pour $2<p$ et

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \operatorname{div}\big(c(x)(1+|u|^2)^{(\tau+1)/2}\big) + b(x)(1+|Du|^2)^{(1+\sigma)/2} = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{2.8}$$

pour $1 < 2N/(N+1) < p \le 2$.

Sans détailler les hypothèses nous obtenons le résultat suivant

**Théorème 2.4.** *Si $c$ ou $b$ est suffisamment petit dans un espace de Lebesgue approprié, la solution de* (2.7) *ou* (2.8) *est unique.*

La preuve utilise des techniques similaires à celles développées pour l'existence dans [G10 ; G12]. C'est d'ailleurs pour cette raison que cet article figure dans ce chapitre et non pas le précédent et que l'on retrouve une hypothèse de petitesse sur $b$ ou $c$. Les hypothèses mêlent les conditions liées à l'existence d'une solution, la régularité de $c$ et $b$, $p$ et les exposants $\tau$ et $\sigma$. Le caractère globalement Lipschitz (ou un contrôle fort de la constante de Lipschitz) des termes $c(x)(1+|u|^2)^{(\tau+1)/2}$ (par rapport à $u$) et $b(x)(1+|Du|^2)^{(1+\sigma)/2}$ (par rapport à $Du$) est capital. Nous procédons par contradiction en supposant que, $u$ et $v$ étant deux solutions, $\{|u-v|>0\}$

est de mesure non nulle. Comme pour l'existence il est facile d'obtenir une contradiction pour $b$ et $c$ suffisamment petit. Dans le cas général ($b$ ou $c$ suffisamment petit) on considère les deux ensembles $\{0 < |u-v| \leq m_1\}$ et $\{|u-v| > m_1\}$ avec $m_1$ défini par $b$ ou $c$. Une estimation du type logarithmique obtenue par les mêmes fonctions tests que celles utilisées dans [G10 ; G12] permet d'obtenir une contradiction dès que $b$ ou $c$ est suffisamment petit.

## 2.3 Problème parabolique

La version parabolique de (2.5) donne aussi un problème non coercif : même dans le cas variationnel l'existence d'une solution n'est pas une conséquence immédiate des résultats sur les équations paraboliques étudiées dans [Lio69]. Avec Rosaria Di Nardo et Filomena Feo nous avons étudié dans [G17] l'existence d'une solution du problème modèle suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u + \operatorname{div}(c|u|^{\gamma-1}u) + b|\nabla u|^{\lambda} = f - \operatorname{div} g & \text{dans } Q_T, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

où $\Delta_p$ est le $p$-Laplacien, $Q_T$ est le cylindre $\Omega\times(0,T)$, $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N\geq 2$, $T>0$, $\gamma = \frac{(N+2)(p-1)}{N+p}$, $c \in (L^r(Q_T))^N$ avec $r = \frac{N+p}{p-1}$, $\lambda = \frac{N(p-1)+p}{N+2}$, $b \in L^{N+2,1}(Q_T)$, $f \in L^1(Q_T)$, $g \in (L^{p'}(Q_T))^N$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$ (quand $p=2$ les puissances de $u$ et de $|Du|$ sont égales à 1).

La notion de solution renormalisée est particulièrement bien adaptée au traitement d'équations paraboliques à données $L^1$ pour les questions d'existence, de stabilité et d'unicité. Initialement elle a été adaptée au cas parabolique dans [BM97] (voir aussi [Bla93] et [Por99] pour un résultat de convergence forte sur les troncatures). L'existence et l'unicité pour des problèmes pseudo-monotones assez généraux sont démontrées dans [BMR01]. Une classe d'équation avec le terme $\frac{\partial b(u)}{\partial t}$ à la place de $\frac{\partial u}{\partial t}$ est étudiée dans [BR98]. Dans [BP05] les auteurs démontrent, avec une nouvelle méthode, l'existence et l'unicité d'une solution renormalisée de problèmes de type Stefan avec une donnée $L^1$.

L'existence d'une solution (2.9) est démontrée pour $c\equiv 0$ dans [Porz99] en utilisant la notion de solution faible, c.-à-d. au sens des distributions, pour $b\equiv 0$ dans [DN10] (en utilisant le cadre des solutions renormalisées) et pour $b\equiv 0$ et $p=2$ dans [BOP03] (et le cadre des solutions entropiques).

Nous donnons dans [G17] un théorème d'existence d'une solution renormalisée pour (2.9) dans le cas où l'opérateur est complet.

**Théorème 2.5.** *Sous les hypothèses précédentes (et sans condition de petitesse sur $b$ ou $c$) il existe au moins une solution renormalisée de* (2.9).

Par rapport au cas elliptique il n'est pas nécessaire d'avoir $b$ ou $c$ suffisamment petit pour obtenir l'existence d'une solution. Ajoutons que les exposants de $|u|$ et $|Du|$ dans les termes d'ordre inférieur sont différents. En effet les estimations de Boccardo-Gallouët proviennent dans le cas parabolique d'une estimation de $T_k(u)$ dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ venant de l'opérateur $-\Delta_p u$ et d'une estimation de $u$ dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ venant du terme $\partial_t u$, ce qui donne deux contributions avec des homogénéités différentes (dans le cas elliptique seul l'opérateur

$-\Delta_p u$ est présent) La figure 2.1 donne l'allure générale des exposants $\gamma$ et $\lambda$ en fonction de $p$ pour les cas elliptique ($\gamma_e$ et $\lambda_e$) et parabolique ($\gamma_p$ et $\lambda_p$). Pour $1 < p \leq 2$ nous avons

$$\gamma_p = \frac{N+2}{N+p}(p-1) \geq p-1 = \gamma_e \quad \text{et} \quad \lambda_p = \frac{N(p-1)+p}{N+2} \geq p-1 = \lambda_e$$

tandis que pour $p \geq 2$

$$\gamma_p = \frac{N+2}{N+p}(p-1) \leq p-1 = \gamma_e \quad \text{et} \quad \lambda_p = \frac{N(p-1)+p}{N+2} \leq p-1 = \lambda_e.$$

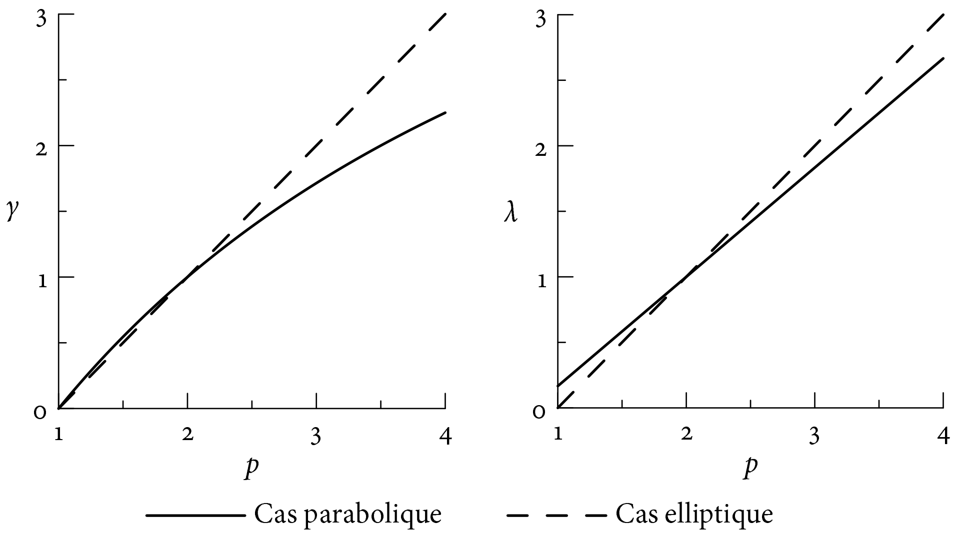


FIGURE 2.1: Comparaison des exposants

La preuve se fait par passage à la limite dans un problème approché. Comme dans le cas elliptique la principale difficulté est d'obtenir des estimations *a priori*. Si $b$ et $c$ sont suffisamment petits il est aisé de conclure via une estimation de Boccardo-Gallouët dans un espace de Lorentz adéquat, que nous démontrons dans notre article. Pour contourner la difficulté, comme dans [Porz99], nous découpons l'intervalle $[0,T]$ en $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]$, …, $[t_{n-1},T]$. En utilisant l'équi–intégrabilité de $c$ et $b$ nous fixons les réels $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ de façon à avoir sur chaque sous–cylindre $\Omega \times [t_i, t_{i+1}]$ les estimations de Boccardo-Gallouët. Les estimations alors démontrées permettent alors de traiter les deux termes d'ordre inférieur et en particulier d'obtenir la condition à l'infini. Même si le terme en $\mathrm{div}(c(x)|u|^{\gamma-1}u)$ pose quelques difficultés et demande un traitement « à part », les méthodes de monotonie développées en particulier dans [BMR01 ; BP01] permettent de conclure.

## 2.4 Perspectives

Dans le premier problème étudié, à savoir

$$\begin{aligned} \lambda u|u|^{p-2} - \Delta_p u - \operatorname{div}\big(c(x)|u|^{p-2}u\big) &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ \big(|Du|^{p-2}Du + c(x)|u|^{p-2}u\big)\cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

le fait d'imposer des conditions de Dirichlet sur une partie du bord permet d'utiliser les inégalités de Poincaré et joue donc un rôle important dans la preuve de l'existence. Dans le cas de conditions de Neumann il y a très peu de résultats pour les données $L^1$ ou mesure. Dans [Pri97] l'auteur adapte pour $2N/(N+1) < p < N$ la méthode de Boccardo-Gallouët développée dans [BG92] pour l'obtention de la solution faible d'un problème pseudo-monotone avec des conditions de Neumann. Pour une classe de problème linéaires non coercifs le cas de conditions mixtes est étudié dans [Dron00] et plus récemment le cas de conditions de Neumann dans [DV09]. De plus dans [DV09] les auteurs démontrent l'existence et l'unicité d'une « solution obtenue comme limite d'approximations » (SOLA) par une méthode de dualité (donc limitée au cas d'opérateur à croissance quadratique). Les techniques de « troncature » semblent délicates à transposer au cas des conditions de Neumann : moyenne de $T_k(u)$ et moyenne de $u$ se conjuguent assez mal et, par exemple, pour $p$ petit si $u$ n'est pas intégrable il faudrait donner un sens à la moyenne de $u$. Récemment, dans [ACMM10], pour des équations $-\operatorname{div}(a(x,Du)) = f$ et des conditions de Neumann les auteurs ont démontré l'existence et l'unicité de la SOLA en mettant l'accent sur la régularité des ouverts considérés. Étudier sous cet angle l'équation (2.10) avec des conditions de Neumann (pures) me semble intéressant aujourd'hui.

Pour le problème parabolique avec condition de Dirichlet nous avons à ce jour un résultat d'existence de solution renormalisée (thérorème 2.5 ci dessus). Adapter à cette équation la méthode d'unicité développée dans [BMR01] pourrait donner des résultats d'unicité. Le principal obstacle vient du terme $-\operatorname{div}(c(x)|u|^{\gamma-1}\gamma)$. Ce travail est en cours.

# 3 Problèmes à matrice de diffusion dégénérée ou qui explose à distance finie

**Travaux** [G7 ; G8 ; G14]

Nous abordons dans ce chapitre des équations dont l'opérateur dégénère à l'infini ou explose à distance finie. Dans les deux cas nous définissons une notion de solution renormalisée qui tient compte du caractère spécifique de l'opérateur.

## 3.1 Équations dégénérées

Dans [G8] nous considérons l'équation quasi–linéaire elliptique

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x,u)Du) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Nous supposerons que $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et que

$$f \in L^1(\Omega). \tag{3.2}$$

La matrice de diffusion $A(x,s)$ est une fonction de Carathéodory à valeurs dans l'espace des matrices réelles qui vérifie la condition

$$A(x,s) \geq \alpha(s)I \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. dans } \Omega, \tag{3.3}$$

où $\alpha$ est une fonction continue positive ou nulle. Le problème devient alors dégénéré (en $u$) sur les zones $\{x \in \Omega; \alpha(u(x)) = 0\}$. La fonction $\alpha$ peut tendre vers 0 en l'infini ; l'équation 3.1 a donc un caractère non uniformément elliptique.

Ce type de problème est très largement étudié dans la littérature, de l'équation des milieux poreux (voir les références dans [Váz07]) à des sujets plus proches du notre dans [ABFOT03 ; AFT98 ; BSLT01 ; BDO98]. Dans [ABFOT03] les auteurs étudient une classe de problèmes dégénérés à croissance $p$, donnent des résultats d'existence et de régularité en fonction de la donnée. L'opérateur est du type $a(x,s,\xi)$ et vérifie l'hypothèse $a(x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha(s)|\xi|^p$ avec $\alpha(s)$ strictement positive de la forme $\alpha(s) = 1/(1+|s|)^{\theta(p-1)}$ et $0 < \theta \leq 1$. Pour des données $L^1$ la notion de solution entropique est utilisée.

L'originalité de [G8] est de considérer la classe des fonctions $\alpha$ telles que $\alpha(s) \geq 0$ (et pas seulement $\alpha(s) > 0$) et une matrice de diffusion $A$ non nécessairement symétrique. Ceci interdit un changement de variable qui donnerait un problème coercif et aussi l'existence d'une solution faible en général. Par l'hypothèse (3.3) on ne peut espérer avoir $DT_k(u)$ dans $(L^2(\Omega))^N$ mais plutôt $DT_k(\widetilde{\alpha}(u)) \in (L^2(\Omega))^N$ où $\widetilde{\alpha}(r) = \int_0^r \alpha(s)ds$, avec formellement l'utilisation la fonction test $T_k(\widetilde{\alpha}(u))$ : ceci donne un sens à $DT_k(\widetilde{\alpha}(u))$ et donc à $D\widetilde{\alpha}(u)$. Dans [G8] nous donnons une formulation renormalisée en $\widetilde{\alpha}(u)$ plutôt qu'en $u$. Nous définissons $Du$ par $\frac{D\widetilde{\alpha}(u)}{\alpha(u)}$ sur $\{x \in \Omega;\, \alpha(u(x)) \neq 0\}$ et par 0 sur le complémentaire $\{x \in \Omega;\, \alpha(u(x)) = 0\}$. Il faut ensuite, pour pouvoir définir une solution renormalisée de (3.1), que le champ $A(x,u)DT_k(u)$ soit dans $(L^2(\Omega))^N$. La seule propriété $DT_k(\widetilde{\alpha}(u)) \in (L^2(\Omega))^N$ et (3.3) ne sont pas suffisantes en général pour avoir $A(x,u)DT_k(u) \in (L^2(\Omega))^N$. Supposer par exemple que les coefficients de $A(x,s)$ sont contrôlés (localement) par $\alpha(s)$ est une possibilité mais cela revient plus ou moins à autoriser le changement d'inconnue $\widetilde{\alpha}(u)$. Dans [G8] nous imposons une condition qui mêle structure sur la matrice $A$ et croissance des coefficients de $A$ : pour tout $k > 0$, il existe $A_k > 0$ tel que

$$|A(x,s)| \le A_k \quad \text{pour tout } |s| \le k \text{ et p.p. dans } \Omega, \tag{3.4}$$
$$|A(x,s)\xi|^2 \le A_k A(x,s)\xi\cdot\xi \quad \text{pour tout } |s| \le k \text{ et p.p. dans } \Omega. \tag{3.5}$$

Nous supposons de plus que

$$\int_0^{+\infty} \alpha(s)ds = \int_{-\infty}^0 \alpha(s)ds = +\infty, \tag{3.6}$$
$$\alpha(s) = 0 \text{ implique } A(x,s) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{3.7}$$

L'hypothèse (3.4) est usuelle dans le domaine des équations à données $L^1$. La condition (3.7) indique que la partie anti-symétrique de la matrice $A$ est contrôlée par la partie symétrique. Ce n'est donc pas à proprement parler une hypothèse de croissance sur les coefficients de $A$. Dans le cas où $\alpha(s) > 0$ pour tout $s$ dans $\mathbb{R}$ alors (3.5) est automatiquement vérifiée. Il en est de même si $A$ est symétrique et $\alpha(s) \ge 0$ sur $\mathbb{R}$ (en utilisant notamment l'hypothèse (3.7)). La condition (3.6) assure que la solution sera finie presque partout. Imposer (3.7) semble naturel, car avec (3.3) la matrice de diffusion $A(x,s)$ dégénère si et seulement si $\alpha(s) = 0$.

La formulation renormalisée est la suivante.

**Définition 3.1.** Une fonction mesurable $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ($u$ est finie presque partout dans $\Omega$) est une solution renormalisée de (3.1) si

$$T_K\big(\widetilde{\alpha}(u)\big) \in H_0^1(\Omega), \quad \text{pour tout } K \ge 0,$$
$$\mathbb{1}_{\{|\widetilde{\alpha}(u)|<K\}} A(x,u)Du\cdot Du \in L^1(\Omega), \quad \text{pour tout } K \ge 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\{|\widetilde{\alpha}(u)|\le n\}} \alpha(u)A(x,u)Du\cdot Du\,dx = 0,$$

et si pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact, $u$ vérifie l'équation

$$-\mathrm{div}\big[h\big(\widetilde{\alpha}(u)\big)A(x,u)Du\big] + h'\big(\widetilde{\alpha}(u)\big)A(x,u)Du\cdot D\widetilde{\alpha}(u) = f h\big(\widetilde{\alpha}(u)\big) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Remarque 3.2.** La propriété $T_K\big(\widetilde{\alpha}(u)\big) \in H_0^1(\Omega)$ permet de donner un sens (presque partout) à $D\widetilde{\alpha}(u)$ (voir [BBGGPV95]). Pour $Du$ nous posons

$$Du(x) = \begin{cases} \frac{D\widetilde{\alpha}(u)}{\alpha(u)}(x) & \text{si } \alpha(u) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lemme de Sard permet de démontrer que

$$D\widetilde{\alpha}(u) = 0 \quad \text{presque partout dans } \{x \in \Omega ; \alpha(u)(x) = 0\}$$

et ainsi

$$D\widetilde{\alpha}(u) = \alpha(u) Du \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Nous démontrons le théorème d'existence

**Théorème 3.3.** *Sous les hypothèses* (3.2)–(3.7) *il existe au moins une solution renormalisée de* (3.1).

La démonstration se fait par passage à la limite dans un problème approché. Si $f^\varepsilon$ est une suite de $L^2(\Omega)$ convergente vers $f$ dans $L^1(\Omega)$, nous prenons une matrice de diffusion $A^\varepsilon(x,s) = A(x, T_{1/\varepsilon}(s)) + \varepsilon I$ pour tout $\varepsilon > 0$ avec $I$ la matrice identité. L'équation $-\mathrm{div}(A^\varepsilon(x,u^\varepsilon)Du^\varepsilon) = f^\varepsilon$ admet une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$. Nous obtenons des estimations *a priori* à l'aide de fonctions tests dépendantes de $u^\varepsilon$ et en tenant compte du caractère dégénéré du problème.

La principale difficulté est alors une question d'identification de la limite faible : démontrer que pour toute fonction $h$ dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact on a

$$h\big(\widetilde{\alpha}(u^\varepsilon)\big) A^\varepsilon(x,u^\varepsilon) Du^\varepsilon \rightharpoonup h\big(\widetilde{\alpha}(u)\big) A(x,u) Du \quad \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N,$$

quand $\varepsilon$ tend vers 0. Ce résultat (voir Lemma 2.5 de [G8]) ne découle pas simplement des hypothèses sur $A$ et des estimations *a priori* obtenues. Pour cela nous utilisons à nouveau l'équation et une fonction test bien choisie ainsi qu'une étude des limites faibles sur l'ensemble $\{x \in \Omega ; \alpha(u) \neq 0\}$ et son complémentaire $\{x \in \Omega ; \alpha(u) = 0\}$.

En tenant compte du caractère dégénéré de l'équation et des hypothèses sur $A$, nous obtenons que la limite est une solution renormalisée de (3.1).

Nous démontrons aussi un résultat d'unicité sous des hypothèses assez techniques sur la matrice $A$. Comme nous avons un problème dégénéré, la conclusion porte naturellement sur $\widetilde{\alpha}(u)$. Dans le cas non dégénéré où $\alpha(s) > \alpha_0 > 0$ sur $\mathbb{R}$ (cas qui est couvert par les hypothèses (3.3)–(3.7)) nous obtenons un résultat d'unicité sur $u$ qui a été développé dans le chapitre 1. Des résultats d'unicité pour une classe d'équations non coercives sont aussi obtenus dans [Por98].

Dans [G8] la condition $\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)ds = \int_0^{+\infty} \alpha(s)ds = +\infty$ est primordiale non seulement pour avoir une solution finie presque partout mais aussi dans la preuve de l'existence (notamment pour la condition à l'infini). Des équations du type $-\mathrm{div}(\frac{Du}{(1+|u|)^m})$ avec $m > 1$ (ce qui correspond à $\alpha$ intégrable sur $\mathbb{R}$) sont examinées dans [ABFOT03 ; BDO98] pour des données $f$ suffisamment régulières et suffisamment petites de façon à assurer l'existence d'une solution finie presque partout. Une question naturelle est d'étudier le cas où $\alpha$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ sans condition de régularité ou petitesse sur la donnée. Dans l'article [ABFOT03] les auteurs étudient dans la boule unité l'exemple suivant, avec le paramètre $\lambda > 0$ et $\theta > 1$,

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\Big(\dfrac{Du_\lambda}{(1+u_\lambda)^\theta}\Big) = \lambda & \text{dans } \Omega \\ u_\lambda = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il existe une valeur critique $\lambda^*$ tel que pour tout $0 < \lambda < \lambda^*$ il existe une solution dans $L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (second membre suffisamment petit). Pour $\lambda = \lambda^*$ la solution existe mais appartient à $H_0^1(\Omega)$ si et seulement si $\theta > (N+2)/(N-2)$. Les auteurs notent que la régularité de $u_{\lambda^*}$ augmente avec $\theta$, ce qui est « bizarre » car en contradiction avec les propriétés de la solution quand $\theta < 1$. Enfin ils exhibent pour $\lambda > \lambda^*$ une solution qui vaut l'infini sur un ensemble de mesure non nulle.

Dans [G7] nous proposons dans le cas où $\int_{\mathbb{R}} \alpha(s)ds < +\infty$ une formulation qui tient compte de la possibilité d'avoir $u$ valant $+\infty$ (ou $-\infty$) sur un ensemble de mesure non nulle.

Considérons le cas modèle où $A(x,s) = \alpha(s)I$ avec $\alpha(s) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(s)ds < +\infty$. Rappelons que $\widetilde{\alpha}(r) = \int_0^r \alpha(s)ds$. Formellement l'équation (3.1) se réécrit $-\Delta\widetilde{\alpha}(u) = f$ dans $\Omega$ et il est clair que, même pour une donnée $f$ dans $L^2(\Omega)$, il est impossible de trouver une solution $u$ car sinon $\widetilde{\alpha}(u)$ serait égale à $v$ où $v$ est l'unique solution dans $H_0^1$ de $-\Delta v = f$, ce qui impliquerait que $|v(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(s)ds$ presque partout dans $\Omega$. Pour donner une idée de la formulation, prenons le problème approché $-\mathrm{div}(\alpha(u^\varepsilon)Du^\varepsilon + \varepsilon Du^\varepsilon) = f$, avec $f$ dans $L^1(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$. Nous savons que $\widetilde{\alpha}(u^\varepsilon) + \varepsilon u^\varepsilon = v$ ce qui entraîne que $u^\varepsilon$ converge presque partout vers $u$ avec

$$u(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } v(x) \le \widetilde{\alpha}(-\infty) = \inf_{t\le 0} \widetilde{\alpha}(t), \\ (\widetilde{\alpha})^{-1}(v(x)) & \text{si } \widetilde{\alpha}(-\infty) < v(x) < \widetilde{\alpha}(+\infty), \\ +\infty & \text{si } v(x) \ge \widetilde{\alpha}(+\infty) = \sup_{t\ge 0} \widetilde{\alpha}(t). \end{cases}$$

Comme pour tout $k > 0$ on sait que $T_k(v) \in H_0^1(\Omega)$, on déduit que $\mathbb{1}_{\{|u(x)|<+\infty\}} Dv \in (L^2(\Omega))^N$. L'identité $\alpha(u^\varepsilon)DT_k(u^\varepsilon) = \frac{\alpha(u^\varepsilon)}{\alpha(u^\varepsilon)+\varepsilon} T_k'(u^\varepsilon)Dv$ permet par passage à la limite d'obtenir

$$\alpha(u)DT_k(u) = T_k'(u)Du \quad \text{presque partout sur } \Omega \setminus \{|u(x)| = k\}.$$

En faisant tendre $k$ vers l'infini on obtient alors que

$$\mathbb{1}_{\{|u(x)|<+\infty\}} \alpha(u)Du = \mathbb{1}_{\{|u(x)|<+\infty\}} Dv \quad \text{presque partout dans } \Omega$$

et donc $\mathbb{1}_{\{|u(x)|<+\infty\}} \alpha(u)Du \in (L^2(\Omega))^N$.

On peut alors réécrire l'équation $-\Delta v = f$ « partiellement en $u$ » par

$$-\mathrm{div}\big(\mathbb{1}_{\{|u(x)|<+\infty\}} \alpha(u)Du\big) - \mathrm{div}\big(\mathbb{1}_{\{|u(x)|=+\infty\}} Dv\big) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.8}$$

Le terme $\mathbb{1}_{\{|u(x)|=+\infty\}} Dv$ ne peut en général s'exprimer en fonction de $u$.

Suivant ce modèle nous proposons dans [G7] deux définitions équivalentes d'une solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x,u)Du) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

avec

- $A(x,s)$ matrice symétrique dont les coefficients sont des fonctions de Carathéodory qui appartiennent à $L^\infty(\Omega\times]-k,k[)$ pour tout $k > 0$,
- il existe une fonction continue strictement positive $\alpha$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et tout $s \in \mathbb{R}$
$$\alpha(s)|\xi|^2 \le A(x,s)\xi\cdot\xi, \tag{3.10}$$

– il existe une fonction continue strictement positive $\gamma$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et tout $s \in \mathbb{R}$

$$A(x,s)\xi\cdot\xi \le \gamma(s)|\xi|^2 \tag{3.11}$$

$$\text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(s)ds < +\infty. \tag{3.12}$$

La première définition est une définition du type « solution renormalisée ». Par rapport au cas usuel de problèmes coercifs, la solution $u$ est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ et n'est pas nécessairement finie presque partout. La régularité et l'équation (tronquée) en elles-mêmes sont identiques au cas usuel. Le fait que $u$ peut être égale à l'infini sur un ensemble de mesure non nulle se retrouve dans la condition à l'infini :

– pour toute fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ telle que $D\varphi = 0$ presque partout sur $\{u(x) = +\infty\}$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\{n<u<n+1\}} A(x,u)Du\cdot Du\varphi dx = \int_{\{u=+\infty\}} f\varphi dx; \tag{3.13}$$

– pour toute fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ telle que $D\varphi = 0$ presque partout sur $\{u(x) = -\infty\}$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\{-n-1<u<-n\}} A(x,u)Du\cdot Du\varphi dx = \int_{\{u=-\infty\}} f\varphi dx; \tag{3.14}$$

Les conditions (3.13) et (3.14) sont d'une certaine façon similaires à celles données dans [DM-MOP99] pour la définition d'une solution renormalisée à donnée mesure, même si dans [DM-MOP99] l'ensemble $\{|u(x)| = +\infty\}$ est de mesure nulle (mais pas de capacité nulle).

Dans la deuxième définition on écrit une équation du type (3.8) qui « voit » tout $\Omega$ avec la présence de deux mesures. Plus précisément il existe deux mesures de Radon à variation bornée, $\mu^+$ et $\mu^-$, qui sont aussi éléments de $H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega)$ telles que

$$\begin{aligned} u &= +\infty \quad \mu^+\text{–presque partout,} \\ u &= -\infty \quad \mu^-\text{–presque partout} \end{aligned}$$

et de plus $\mathbb{1}_{\{|u(x)|<+\infty\}}A(x,u)Du$ est un élément de $(L^2(\Omega))^N$ et vérifie

$$-\mathrm{div}\big(\mathbb{1}_{\{|u(x)|<+\infty\}}A(x,u)Du\big) - \mu^+ + \mu^- = f\mathbb{1}_{\{|u|<+\infty\}} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Une dernière propriété fait le lien entre $\mu^+$ (resp. $\mu^-$) et $f\mathbb{1}_{\{u=+\infty\}}$ (resp. $f\mathbb{1}_{\{u=-\infty\}}$). Dans le cas d'une matrice $A(x,s)$ de diffusion qui explose pour une valeur finie de $s$, une définition similaire a été donnée dans [BR02].

Nous démontrons dans [G7] que les deux définitions sont équivalentes ainsi qu'un résultat d'existence.

**Théorème 3.4.** *Sous les hypothèses (3.10)–(3.12) et pour tout $f$ dans $L^1(\Omega)$ il existe au moins une solution renormalisée de (3.9).*

La preuve de ce théorème se fait par passage à la limite dans un problème approché avec comme matrice de diffusion $A^\varepsilon(x,s) = A(x,s)+\varepsilon I$ pour $\varepsilon > 0$. Une des difficultés tient au fait que la matrice $A$ est contrôlée « par le bas » par $\alpha(s)$ et « par le haut » par $\gamma(s)$. En effet la condition d'ellipticité (3.11) donnera des estimations *a priori* sur des fonctions dépendantes de $u^\varepsilon$ et $\alpha(s)$ (ou une primitive de $\alpha(s)$) alors que pour contrôler les termes de l'équation la majoration (3.12) demande des estimations *a priori* sur des fonctions dépendantes de $u^\varepsilon$ et $\gamma(s)$ (ou une primitive de $\gamma(s)$). La situation où les deux fonctions $\alpha$ et $\gamma$ sont égales à une constante multiplicative près est plus aisée.

D'une façon générale, dans le cadre habituel, une des clefs de la démonstration de l'existence d'une solution renormalisée est d'obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\{n<|u^\varepsilon|<n+1\}} A^\varepsilon(x,u^\varepsilon)Du^\varepsilon\cdot Du^\varepsilon\, dx = 0, \tag{3.15}$$

ce qui est directement lié au fait que $u$ est finie presque partout. Comme ce n'est pas le cas ici, l'originalité de notre preuve consiste à démontrer une version de (3.15) dans laquelle le terme $A^\varepsilon(x,u^\varepsilon)Du^\varepsilon\cdot Du^\varepsilon \mathbb{1}_{\{n<u^\varepsilon<n+1\}}$ est remplacé par $A^\varepsilon(x,u^\varepsilon)Du^\varepsilon\cdot Dv^\varepsilon \mathbb{1}_{\{n<v^\varepsilon<n+1\}}$ avec $v^\varepsilon = \int_0^{u^\varepsilon}\gamma(s)ds + \varepsilon u^\varepsilon$.

Dans le cas où $\alpha(s) = \beta\gamma(s)$ nous démontrons un résultat partiel d'unicité. Si $u$ et $v$ sont deux solutions pour une même donnée $f$, la grande difficulté est le contrôle des ensembles $\{|u(x)| = +\infty\}$ et $\{|v(x)| = +\infty\}$. En supposant que $u$ et $v$ valent $+\infty$ (resp. $-\infty$) sur le même ensemble et que la matrice $A(x,s)$ vérifie une condition globale, nous obtenons l'unicité de la solution renormalisée. Plus précisément

**Théorème 3.5.** *Supposons que $A(x,s)$ vérifie de plus pour tout $r$ et $s$ dans $\mathbb{R}$*

$$\left|\frac{A(x,s)}{\alpha(s)} - \frac{A(x,r)}{\alpha(r)}\right| \le C\left|\widetilde{\alpha}(s)-\widetilde{\alpha}(r)\right|, \quad \forall s,r\in\mathbb{R}, \text{p.p. } x\in\Omega.$$

*Si $u$ et $v$ sont deux solutions renormalisées de (3.9) telles que (à un ensemble de mesure nulle près)*

$$\{u(x)=+\infty\} = \{v(x)=+\infty\}$$
$$\{u(x)=-\infty\} = \{v(x)=-\infty\}$$

*alors $u = v$ presque partout dans $\Omega$.*

Nous suivons la méthode standard (voir [Art86; CC85; BGM92]) avec $T_k(\widetilde{\alpha}(u)-\widetilde{\alpha}(v))$ comme fonction test. Par l'hypothèse supplémentaire sur $u$ et $v$ on en déduit que $T_k(\widetilde{\alpha}(u)-\widetilde{\alpha}(v)) = 0$ et $DT_k(\widetilde{\alpha}(u)-\widetilde{\alpha}(v)) = 0$ presque partout sur $\{|u(x)|=+\infty\} = \{|v(x)|=+\infty\}$ ce qui permet d'éliminer les termes gênants et de poursuivre la preuve habituelle.

## 3.2 Matrice de diffusion qui explose

Dans cette section nous abordons une classe de problèmes elliptiques (resp. paraboliques) dont la matrice de diffusion $A(x,s)$ (resp. $A(t,x,s)$) explose uniformément pour une valeur $m$ strictement positive. Nous supposons qu'il existe deux fonctions $\beta$ et $\gamma$ définies sur $]-\infty,m[$ (avec $m>0$) vérifiant $0<\beta_0\le\beta(s)\le\gamma(s)$ et

$$\lim_{s\to m^-}\beta(s) = +\infty \tag{3.16}$$

$$\beta(s)|\xi|^2 \le A(x,s)\xi\cdot\xi \le \gamma(s)|\xi|^2 \quad (\text{resp. } \beta(s)|\xi|^2 \le A(t,x,s)\xi\cdot\xi\le\gamma(s)|\xi|^2) \tag{3.17}$$

pour tout $s < m$, p.p. $x \in \Omega$ (resp. p.p. $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$).

Nous avons vu précédemment que la principale difficulté des problèmes dégénérés (comme ceux de [G7]) est qu'il faut donner un sens à $A(x,u)Du$ (ou préciser le comportement) sur la zone où la solution vaut l'infini. Nous avons ici éventuellement une difficulté analogue avec la zone $\{u = m\}$, zone sur laquelle il faut donner un sens à l'équation. Selon le comportement de $\beta$ et $\gamma$ on peut distinguer deux cas. Le premier correspond à $\int_0^m \beta(s)ds = +\infty$ et il n'est pas alors très compliqué de construire par approximation une solution $u$ strictement inférieure à $m$ presque partout (c.-à.-d. vérifiant $\operatorname{mes}\{u = m\} = 0$) (voir par exemple [Ors03 ; GVOG03]). En effet, formellement, le changement d'inconnue $\int_0^u \beta(s)ds$ donne un problème coercif avec une solution finie presque partout. Dans le second cas où $\int_0^m \gamma(s)ds < +\infty$, il est alors possible d'avoir $\operatorname{mes}\{u = m\} > 0$. Dans [BR02] les auteurs analysent un problème elliptique avec un second membre $L^2$, une matrice $A$ indépendante de la variable $x$ et dont les coefficients diagonaux explosent en $m$. Deux définitions équivalentes de solution qui donnent un sens à l'équation même si $\operatorname{mes}\{u = m\} > 0$ sont données. Un résultat d'existence est démontrée qui inclut les deux possibilités, intégrabilité ou non sur $[0, m[$ des coefficients diagonaux de $A$.

Dans [G14] nous étudions plus particulièrement le cas où $\int_0^m \gamma(s)ds < +\infty$, avec une donnée $L^1$, pour les problèmes elliptiques et paraboliques. Nous définissons une notion de solution renormalisée (plus précise dans le cas elliptique que celle de [BR02]) et nous démontrons l'existence d'une solution.

Donnons dans le cas stationnaire, la définition d'une solution renormalisée de l'équation

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x,u)Du) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

**Définition 3.6.** Sous les hypothèses (3.16) et (3.17) avec $\int_0^m \gamma(s)ds < +\infty$, une fonction mesurable $u$ est solution renormalisée de l'équation (3.18) si

$$u \le m \text{ presque partout dans } \Omega, \tag{3.19}$$

$$\forall k > 0, \quad T_k(u) \in H_0^1(\Omega), \tag{3.20}$$

$$\mathbb{1}_{\{0<u<m\}} A(x,u)Du \in (L^2(\Omega))^N, \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} \text{pour toute fonction } h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \text{ avec } h \text{ à support compact dans } \mathbb{R} \text{ et } h(m) = 0 \\ \quad -\operatorname{div}\big[h(u)A(x,u)Du\big] + h'(u)A(x,u)Du\cdot Du = h(u)f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\{-2n<u<-n\}} A(x,u)Du\cdot Du dx = 0 \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} \text{pour toute fonction } \varphi \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ telle que } D\varphi = 0 \text{ p.p. sur } \{x \in \Omega ; u(x) = m\} \\ \quad \lim_{n\to+\infty} n \int_{\{m-2/n<u<m-1/n\}} A(x,u)Du\cdot Du\varphi dx = \int_{\{u=m\}} f\varphi dx. \end{cases} \tag{3.24}$$

Les conditions (3.20) et (3.23) sont classiques pour les solutions renormalisées. Imposer $u \le m$ presque partout dans $\Omega$ est naturel pour une matrice de diffusion qui explose en $m$. La régularité (3.21) est plutôt inattendue pour des équations à données $L^1$ et est fortement liée au fait que $\gamma$ est intégrable sur $[0, m[$. Cela permet de donner un sens à tous les termes de l'équation (3.22) puisque la fonction $h$ est à support compact dans $\mathbb{R}$ et vérifie $h(m) = 0$. Comme $u \le m$, demander $h(s) = 0$ pour tout $s \ge m$ est équivalent à imposer $h(m) = 0$. La condition (3.24), qui améliore celle donnée dans [BR02], est l'analogue de la condition à l'infini mais en $u = m$ et compense le manque d'information sur la zone $\{x \in \Omega;\, u(x) = m\}$ puisque l'équation (3.22) ne « voit » pas cette zone.

Quant à l'équation parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}[A(t,x,u)Du] = f & \text{dans } (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.25}$$

avec une matrice de diffusion $A$ qui explose en $m$, vérifiant (3.16)–(3.17) et $\int_0^m \gamma(s)ds < +\infty$, $f$ dans $L^1((0,T)\times\Omega)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$ vérifiant $u_0 \le m$ p.p. dans $\Omega$, nous donnons une définition de solution renormalisée qui mélange celle usuelle pour les équations paraboliques à données $L^1$ donnée dans [BP05] et la définition 3.6. Il y a cependant une différence pour la condition d'énergie près de la zone $\{u = m\}$. Nous imposons que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([0,T))$

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_{\{m-2/n<u<m-1/n\}} \varphi A(t,x,u)Du\cdot Du dx dt = \int_{\{u=m\}} f\varphi dx dt. \tag{3.26}$$

Ici la fonction $\varphi$ ne dépend pas de $x$. Pour une question de régularité nous n'avons pas été en mesure d'obtenir une version de (3.26) pour des fonctions $\varphi$ dépendant de $t$ et $x$ mais à gradient (en $x$) nul sur $\{(t,x);\, u(t,x) = m\}$ qui serait l'analogue du cas elliptique.

Nous démontrons dans [G14] pour le problème stationnaire et d'évolution un théorème d'existence.

**Théorème 3.7.** *Sous les hypothèses* (3.16)-(3.17) *et* $\int_0^m \gamma(s)ds < +\infty$, *pour tout* $f$ *dans* $L^1(\Omega)$ *(resp.* $L^1(Q_T)$*) il existe au moins une solution renormalisée de* (3.18) *(resp.* (3.25)*).*

Dans les deux cas la preuve se fait par passage à la limite dans un problème approché. La difficulté principale tient au contrôle de la matrice $A$, qui vérifie

$$\beta(s)|\xi|^2 \le A(t,x,s)\xi\cdot\xi \le \gamma(s)|\xi|^2$$

où les deux fonctions $\beta$ et $\gamma$ sont différentes. Comme pour le cas dégénéré supposer que $\beta$ et $\gamma$ sont égales à une constante multiplicative près simplifie énormément. Nous avons utilisé une matrice de diffusion $A^\varepsilon$ différente de celle considérée usuellement et qui consiste à « tronquer près de $m$ » : pour $\varepsilon > 0$ nous définissons

$$A^\varepsilon(x,s) = b_\varepsilon(s)A(x,s) + (1 - b_\varepsilon(s))\beta(m-\varepsilon)I,$$

où $b^\varepsilon$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$b_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \le m - 2\varepsilon, \\ 1 - \dfrac{r - m + 2\varepsilon}{\varepsilon} & \text{si } m - 2\varepsilon \le r \le m - \varepsilon, \\ 0 & \text{si } r \ge m - \varepsilon, \end{cases}$$

(la définition est la même dans le cas parabolique où $A$ dépend également de $t$). Si $u^\varepsilon$ est une solution renormalisée du problème approché, la partie négative de $u^\varepsilon$ ne pose aucune problème (l'opérateur y est coercif). Les principales difficultés sont les estimations *a priori* de la partie positive de $u^\varepsilon$ (ou de fonctions cette partie positive), le comportement de l'énergie près de $\{u = m\}$ et l'identification des limites faibles des fonctions considérées. Nous utilisons par exemple les fonctions tests

$$v^\varepsilon = \int_0^{(u^\varepsilon)^+} \big(\gamma(s)b_\varepsilon(s) + (1 - b_\varepsilon(s))\beta(m-\varepsilon)\big)ds$$

et

$$w^\varepsilon = \int_0^{(u^\varepsilon)^+} \big(\beta(s)b_\varepsilon(s) + (1 - b_\varepsilon(s))\beta(m-\varepsilon)\big)ds;$$

comme $\gamma$ est intégrable sur $[0,m[$ on en déduit que $|v^\epsilon - w^\varepsilon| \leq M$ uniformément en $\varepsilon$, propriété qui joue un rôle important dans notre preuve.

Dans le cas d'évolution nous avons des difficultés supplémentaires liées aux questions de régularité par rapport à $t$ de la solution et nous utilisons les techniques développées dans [BP05].

**Remarque 3.8.** Les preuves développées dans [G14] permettent aussi de considérer le cas où $\int_0^m \beta(s)ds = +\infty$. Il faut alors modifier la définition de solution renormalisée en supprimant la condition $\mathbb{1}_{\{0<u<m\}}A(x,u)Du \in (L^2(\Omega))^N$. Les estimations *a priori* permettent de déduire que $\{u = m\}$ est de mesure nulle.

Si $\int_0^m \gamma(s)ds = +\infty$, nous supposons que la fonction $\beta$ a le même comportement sur $[0,m[$, c'est-à-dire que $\int_0^m \gamma(s)ds = \int_0^m \beta(s)ds = +\infty$. Supposer que $\beta$ est intégrable et que $\gamma$ ne l'est pas ne nous paraît ni accessible ni une hypothèse naturelle.

Dans le cas elliptique, comme dans [G7], nous pouvons obtenir un résultat partiel d'unicité en supposant que $A(x,s)/\beta(s)$ est uniformément coercive, bornée et globalement lipschitzienne par rapport à la variable $\int_0^r \beta(s)ds$ et en considérant des solutions $u$ et $v$ telles que $\{u = m\} = \{v = m\}$ (à un ensemble de mesure nulle près).

# 4 Systèmes couplés

**Travaux** [G1 ; G2 ; G4 ; G6 ; G16]

Ce chapitre est consacré à l'étude de deux systèmes d'équations aux dérivées partielles issus de la thermo-mécanique qui couplent des effets mécaniques et thermiques. Le point commun est la prise en compte de la dissipation mécanique dans l'équation de conservation de l'énergie, qui est un terme quadratique par rapport au gradient de la vitesse de déplacement. Naturellement un tel terme est attendu dans $L^1$, ce qui nous a conduit à utiliser le cadre des solutions renormalisées pour l'équation de l'énergie. La dérivation de ces modèles fait appel aux principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus (voir par exemple [Ger73]).

Le premier système est un modèle de mécanique du solide de type Kelvin-Voigt qui décrit le couplage entre la déformation et la température d'un matériau viscoélastique. Une version stationnaire et une version d'évolution étaient l'objet de ma thèse. Les travaux [G1 ; G2 ; G6] ne seront pas décrits ici. Dans [G4], qui concerne un modèle plus général, nous tenons compte, dans le cadre des petites déformations, de la dissipation mécanique et nous nous plaçons en dimension 2 ou 3. Dans [FS86] les auteurs établissent le modèle et donnent des résultats d'existence pour des versions linéarisées (voir aussi [ChMu89 ; ChMu06]). En dimension 1 des modèles plus généraux (notamment en grande déformation) sont étudiés dans [Daf82 ; DH82 ; RSZ93 ; RZ97]. D'autres auteurs se sont intéressés à des modèles de thermoviscoélasticité avec une équation de conservation de l'énergie à donnée $L^1$ dans le cadre des solutions renormalisées (voir [Zim04] avec une énergie non convexe) ou des solutions faibles (voir [Rou09]).

Le second système est un modèle de mécanique des fluides de type Boussinesq dans lequel l'équation de Navier-Stokes est couplée avec l'équation de conservation de l'énergie avec terme de transport. Les équations du modèle que nous considérons sont, par exemple, établies dans [BMPT95]. Des systèmes non linéaires similaires pour la thermo-mécanique des fluides sont aussi étudiés dans [Lio96 ; CFC98 ; CFC97 ; DG98].

## 4.1 Système de type Kelvin-Voigt

Dans [G4] nous sommes intéressés à la classe de systèmes couplés décrit dans [FS86] (où figure aussi une étude d'une version linéarisée)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left[B_1\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + B_2\mathcal{E}(u)\right] + Df(\theta) = g \qquad \text{dans } \Omega\times(0,T), \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} - \operatorname{div}\big(AD\theta\big) = B_1\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\cdot\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\operatorname{tr}\left(\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \qquad \text{dans } \Omega\times(0,T), \tag{4.2}$$

$$b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{4.3}$$

$$u(t=0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = v_0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{4.4}$$

$$u = 0, \qquad \theta = 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T). \tag{4.5}$$

Les inconnues sont la température $\theta$ et le déplacement $u$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). Ici $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N = 2$ ou 3, $T > 0$. $\mathcal{E}(v) = \frac{\nabla v + {}^t\nabla v}{2}$ désigne le gradient symétrisé de la fonction $v$, et $\mathcal{E}(u)$, $\mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ sont respectivement les tenseurs de déformations linéarisées et de taux de déformations. $B_1$ et $B_2$ sont les tenseurs d'ordre 4 de viscosité et d'élasticité, tenseurs qui sont symétriques coercifs et à coefficients dans $L^\infty(Q_T)$. La matrice de diffusion $A$ est symétrique coercive et à coefficients dans $L^\infty(Q_T)$. La fonction $b$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, nulle en 0 avec $|b(r)| \geq \delta|r|^\gamma$, $\gamma > 0$, pour tout $|r| \geq 1$. La donnée $g$ est dans $L^2(Q_T)$ et les données initiales sont suffisamment régulières. La fonction $f$ est continue et vérifie une hypothèse de croissance.

L'originalité de ce travail tient au fort couplage, à la non linéarité des équations et à la forme du second membre de l'équation de conservation de l'énergie, qui appartient au mieux à $L^1$. Comme la fonction $b$ est à croissance $\gamma$ à l'infini, nous en déduisons que $\theta$ appartient à $L^p(Q_T)$ pour tout $1 \leq p < \max(\gamma, 1 + 2\gamma/N)$. Pour pouvoir résoudre le système, c.-à-d. avoir $f(\theta)$ dans $L^2$ et le second membre de (4.2) dans $L^1$, nous sommes donc conduits à supposer que la fonction $f$ vérifie l'hypothèse de croissance

$$\forall r \in \mathbb{R} \qquad \big|f(r)\big| \leq a + M|r|^\alpha \tag{4.6}$$

avec $0 \leq 2\alpha < \max\big(\gamma, 1 + 2\gamma/N\big)$.

Nous introduisons dans [G4] la définition suivante : un couple $(u, \theta)$ est une solution faible-renormalisée du système (4.1)–(4.5) si $u$ est une solution faible de (4.1) avec

$$u \in \mathcal{C}([0,T], (H_0^1(\Omega))^N), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; (H_0^1(\Omega))^N \cap \mathcal{C}([0,T], (L^2(\Omega))^N)$$

et si $\theta$ une solution renormalisée de (4.2).

Nous donnons des résultats d'existence. Le premier théorème concerne l'existence de solutions petites pour des données suffisamment petites.

**Théorème 4.1.** *Outre les hypothèses précédentes (on suppose en particulier que $f$ vérifie la condition de croissance* (4.6)*) supposons de plus que*

$$\exists \delta' > 0, \quad \big|b(r)\big| \geq \delta'|r|^{\gamma'} \quad \textit{pour } |r| \leq 1 \tag{4.7}$$

*avec $\gamma' > 0$ tel que $1 \leq \gamma' < \alpha(N+2) - \frac{N}{2}$.*

*Il existe $\eta > 0$ tel que si*

$$a + \|g\|_{(L^2(Q))^N} + \|u_0\|_{(H_0^1(\Omega))^N} + \|v_0\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \eta \tag{4.8}$$

*alors il existe au moins une solution faible-renormalisée de* (4.1)–(4.5).

Pour la preuve nous avons tout d'abord besoin de quelques résultats préliminaires sur les solutions renormalisées : compacité, estimations *a priori* avec dépendance précise par rapport aux données. L'existence est alors obtenue par un théorème de point fixe non pas sur le système lui-même mais sur un système approché. L'idée est d'appliquer le théorème du point fixe de Leray-Schauder sur une même boule (d'un espace de Lebesgue choisi en fonction de $\alpha$)

uniformément par rapport au problème approché. Nous obtenons enfin la convergence (à une sous-suite près) vers une solution faible-renormalisée du système par des propriétés de compacité des solutions renormalisées par rapport au second membre. La difficulté est d'obtenir des estimations *a priori* pour choisir cette boule stable par l'application « point fixe du problème approché ». Pour cela connaître le comportement de $b(r)$ avec l'hypothèse (4.7) pour $r$ proche de 0 est capital. L'idée est d'obtenir des estimations de type Boccardo-Gallouët sur $T_k(\theta)$ en tenant compte du comportement de $b$ proche de 0 et sur $\theta - T_k(\theta)$ en tenant compte du comportement de $b$ à l'infini. La réunion de ces deux estimations *a priori* nous donne un contrôle précis de $\theta$ dans l'espace de Lebesgue dans lequel nous appliquons le théorème de point fixe.

Nous pouvons nous affranchir de la petitesse des données moyennant une hypothèse supplémentaire sur le comportement de $f$ sur $\mathbb{R}^-$. Dans ce qui suit le contrôle de $b$ près de 0 supposé dans le théorème précédent n'est pas nécessaire.

**Théorème 4.2.** *Sous les hypothèses du théorème 4.1 mais sans supposer (4.7) ni (4.8) supposons que $f$ vérifie*

$$\exists a' \geq 0,\ \exists M' \geq 0,\ \forall r \in \mathbb{R}^-, \quad \big|f(r)\big| \leq a' + M'|r|^\beta \tag{4.9}$$

*avec* $0 \leq 2\beta < \max\big(\gamma, \frac{N+2\gamma}{(N+2)}\big)$. *Alors il existe au moins une solution faible-renormalisée de (4.1)–(4.5).*

**Théorème 4.3.** *Sous les hypothèses du théorème 4.1 mais sans supposer (4.7) ni (4.8) supposons que $f$ et $\theta_0$ vérifient*

$$\exists r_0 \in \mathbb{R}^- \text{ tel que } f(r_0) = 0 \text{ et } \theta_0 \geq r_0 \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{4.10}$$

*Alors il existe au moins une solution faible-renormalisée $(u,\theta)$ de (4.1)–(4.5) telle que $\theta \geq r_0$ presque partout dans $Q_T$.*

**Remarque 4.4.** Comme $\frac{N+2\gamma}{N+2} < 1 + \frac{2\gamma}{N}$, la condition de croissance pour $f$ sur $\mathbb{R}^-$ est plus stricte dans le théorème 4.2 que dans le théorème 4.1 mais identique sur $\mathbb{R}^+$. Quant au théorème 4.3 l'hypothèse (4.10) permet de se passer de toute hypothèse de croissance sur $\mathbb{R}^-$.

Pour démontrer ces deux théorèmes l'approche par point fixe ne convient pas. Pour s'en convaincre, dans le cas où $b(r) = r$ ($\gamma = 1$) et $N = 2$, il suffit de constater que l'équation de conservation du mouvement et l'hypothèse de croissance sur $f$ entraînent un contrôle du second membre de l'équation de l'énergie en $\||\theta|^\alpha\|^2_{L^2}$ ce qui est homogène à une puissance de $\theta$ en $2\alpha$. Comme l'opérateur $\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta$ est linéaire dans le cas considéré, pour $1 \leq 2\alpha < 2$, l'approche « par point fixe » ne permet pas d'aboutir.

Pour obtenir le théorème 4.2 nous partons donc d'une solution d'un problème approché (par exemple en tronquant $f$) pour lequel nous obtenons une information supplémentaire sur la solution. La structure du système joue ici un rôle crucial : une combinaison des deux équations nous donne une estimation supplémentaire. Formellement cela consiste à utiliser la fonction test $u$ pour (4.1) et la fonction test $T_k(\theta)/k$ pour (4.2). La somme des deux égalités et le regroupement de certains termes nous donnent un contrôle de $b(\theta)$ dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ par $f(\theta)\mathbb{1}_{\{\theta<0\}}$. Une hypothèse plus forte sur le comportement de $f$ sur $\mathbb{R}^-$ et le lemme de Gronwall donnent alors une estimation supplémentaire sur $\theta$. Ceci améliore les estimations de Boccardo-Gallouët et les propriétés de compacité des solutions renormalisées permettent de conclure.

Pour démontrer le théorème 4.3, on remplace la fonction $f$ par la fonction $\tilde{f}$ égale à $f$ sur $[r_0,+\infty[$ et à 0 sur $]-\infty,r_0[$. Ainsi le théorème 4.2 donne une solution $\theta$ pour laquelle la structure du second membre de (4.2) et l'hypothèse sur la donnée initiale montrent que $\theta \geq r_0$ presque partout dans $Q_T$.

## 4.2 Système de Boussinesq

Dans [G16] nous considérons le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - 2\,\mathrm{div}\,(\mu(\theta)\mathcal{E}(u)) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{dans } Q, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial b(\theta)}{\partial t} + u\cdot\nabla b(\theta) - \Delta\theta = 2\mu(\theta)|\mathcal{E}(u)|^2 \quad \text{dans } Q, \tag{4.12}$$

$$\mathrm{div}\, u = 0 \quad \text{dans } Q, \tag{4.13}$$

$$u = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \tag{4.14}$$

$$u(t=0) = u_0 \text{ et } b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.15}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné Lipschitz de $\mathbb{R}^N$ ($N=2$ or $N=3$), $T>0$, $Q_T = \Omega\times(0,T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega\times(0,T)$. Les inconnues sont les champs de déplacement $u:\Omega\times(0,T)\longrightarrow\mathbb{R}^N$ et de température $\theta:\Omega\times(0,T)\longrightarrow\mathbb{R}$. Le champ $\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ est le tenseur des taux de déformation. L'équation (4.11) est l'équation de conservation du mouvement. La fonction $b$ est de classe $\mathcal{C}^1$, nulle en 0 qui vérifie $b'(r)\geq\delta>0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $F$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que le fluide est incompressible.

L'originalité de ce travail par rapport aux travaux cités précédemment est de considérer une viscosité cinématique $\mu(\theta)$ dépendante de la température et une force de gravité proportionnelle à des variations de densité dépendantes de la température et de prendre en compte l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|\mathcal{E}(u)|^2$ dans le second membre de (4.12). Le dernier point induit un fort couplage et la nécessité de traiter une équation aux dérivées partielles parabolique à donnée $L^1$.

Concernant l'équation de Navier-Stokes nous utilisons la formulation classique (voir l'ouvrage [Tem84] par exemple), et imposons ce qui est nécessaire sur l'ouvert et les données initiales pour avoir l'existence et l'unicité d'une solution faible en dimension 2 et 3 (en dimension 3 temps petit ou données petites). Comme dans [G4], nous cherchons à établir l'existence d'une solution faible-renormalisée $(u,\theta)$, c.-à.-d. avec $u$ solution faible de (4.11) et $\theta$ solution renormalisée de (4.12).

Comme l'équation parabolique (4.12) contient le terme $u\cdot\nabla b(\theta)$ nous nous assurons dans [G16] que le cadre des solutions renormalisées est adéquat pour résoudre le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b(\theta)}{\partial t} + u\cdot\nabla b(\theta) - \Delta\theta = f & \text{dans } Q, \\ \theta = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ b(\theta)(t=0) = b(\theta_0) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.16}$$

avec $f$ dans $L^1(Q_T)$, $\theta_0$ telle que $b(\theta_0)\in L^1(\Omega)$ et $u$ donné dans l'espace des solutions de l'équation de Navier-Stokes. Le champ $u$ étant à divergence nulle les méthodes développées dans [BR98] s'appliquent ici et nous obtenons des résultats d'existence, d'unicité, de stabilité et de compacité. Nous démontrons par ailleurs en dimension $N=2$ que la solution renormalisée de (4.16) appartient à $L^r(0,T;L^q(\Omega))$ pour $1<q<+\infty$ et $r<\frac{q}{q-1}$. Il s'agit d'estimations avec régularité découplée entre la variable de temps et d'espace.

En dimension $N=2$ nous établissons un théorème d'existence pour une fonction $F$ vérifiant une condition de croissance. Demander que $F(\theta)$ appartiennent à $L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega)^2)$ pour pouvoir résoudre l'équation de Navier-Stokes, et l'utilisation des estimations de Boccardo-Gallouët et des estimations dans $L^r(0,T;L^q(\Omega))$ nous conduisent à supposer que $F$ vérifie la condition de croissance

$$\forall r\in\mathbb{R},\quad |F(r)|\leq a+M|r|^\alpha, \tag{4.17}$$

avec $a\geq 0$, $M\geq 0$ et $0\leq 2\alpha<3$.

**Théorème 4.5.** *En dimension $N=2$, sous la condition de croissance* (4.17)
- *si $0\leq 2\alpha\leq 1$, il existe au moins une solution faible-renormalisée du problème* (4.11)–(4.15).
- *si $1<2\alpha<3$, il existe $\eta>0$ tel que si*

$$a+\|u_0\|_{(L^2(\Omega))^2}+\|b(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)}\leq\eta,$$

*il existe au moins une solution faible-renormalisée du problème* (4.11)–(4.15).

Les propriétés des solutions renormalisées nous permettent une approche « par point fixe uniformément pour un problème approché ». Pour $0\leq 2\alpha\leq 1$ la condition de petitesse n'est pas nécessaire. Formellement c'est le contrôle de $\theta$ dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ par $a^2+\|\theta\|^2_{L^{2\alpha}(\Omega)}$ qui fournit ce résultat. Pour $1<2\alpha<3$ la situation est plus délicate et requiert la petitesse des données et de $a$ et les estimations découplées en temps et en espace qui conduisent à avoir $F(\theta)$ dans $L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^2)$.

En dimension $N=3$ le manque d'unicité des équations de Navier-Stokes nous conduit à prendre plus de précautions sur les données initiales, sur $\mu$ et sur $F$ (voir le théorème 3.11 de [Tem84])

**Théorème 4.6.** *Supposons que $F$ est bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, $\mu(s)=\mathrm{Cste}=\mu_0>0$ et que $u_0\in(H^1_0(\Omega))^3$ avec $\operatorname{div}u_0=0$ et $u_0\cdot n=0$ sur $\partial\Omega$. Alors il existe $\eta>0$ tel que si $\|u_0\|_{(H^1_0(\Omega))^3}+\|F\|_{(L^\infty(\mathbb{R}))^3}\leq\eta$, le problème* (4.11)–(4.15) *admet au moins une solution faible-renormalisée.*

La preuve utilise les techniques similaires à celles développées dans le cas $N=2$.

## 4.3 Perspectives

Le cadre des solutions renormalisées est approprié aux systèmes d'équations aux dérivées partielles dont une des équations (parabolique ou elliptique) est à donnée $L^1$. Il est envisageable d'étudier d'autres systèmes liés à la mécanique, physique, etc.

Les travaux [G4] et [G16] concernent l'existence de telles solutions. Dans le cas elliptique j'ai démontré un résultat d'unicité de solutions petites de système de Kelvin-Voigt (voir [G6]). Je travaille actuellement sur l'unicité de la solution d'un système parabolique de Boussinesq en dimension 2.

# 5 Travaux de l'auteur


[G1] D. Blanchard et O. Guibé. « Existence d'une solution pour un système non linéaire en thermoviscoélasticité ». Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 325.10 (1997), p. 1125–1130.

[G2] O. Guibé. « Solutions entropiques et renormalisées pour un système non linéaire couplé ». Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 326.6 (1998), p. 685–690.

[G3] M. Ben Cheikh Ali et O. Guibé. « Résultats d'existence et d'unicité pour une classe de problèmes non linéaires et non coercifs ». Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 329.11 (1999), p. 967–972.

[G4] D. Blanchard et O. Guibé. « Existence of a solution for a nonlinear system in thermoviscoelasticity ». Dans : *Adv. Differential Equations* 5.10-12 (2000), p. 1221–1252.

[G5] O. Guibé. « Remarks on the uniqueness of comparable renormalized solutions of elliptic equations with measure data ». Dans : *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 180.4 (2002), p. 441–449.

[G6] O. Guibé. « Existence and uniqueness results for a nonlinear stationary system ». Dans : *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 10.3 (2003), p. 309–328.

[G7] D. Blanchard et O. Guibé. « Infinite valued solutions of non-uniformly elliptic problems ». Dans : *Anal. Appl. (Singap.)* 2.3 (2004), p. 227–246.

[G8] D. Blanchard, F. Désir et O. Guibé. « Quasi-linear degenerate elliptic problems with $L^1$ data ». Dans : *Nonlinear Anal.* 60.3 (2005), p. 557–587.

[G9] M. Ben Cheikh Ali et O. Guibé. « Nonlinear and non-coercive elliptic problems with integrable data ». Dans : *Adv. Math. Sci. Appl.* 16.1 (2006), p. 275–297.

[G10] O. Guibé et A. Mercaldo. « Existence and stability results for renormalized solutions to noncoercive nonlinear elliptic equations with measure data ». Dans : *Potential Anal.* 25.3 (2006), p. 223–258.

[G11] O. Guibé. « Uniqueness of the solution to quasilinear elliptic equations under a local condition on the diffusion matrix ». Dans : *Adv. Math. Sci. Appl.* 17.2 (2007), p. 357–368.

[G12] O. Guibé et A. Mercaldo. « Existence of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with two lower order terms and measure data ». Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 360.2 (2008), p. 643–669.

[G13] O. Guibé et A. Mercaldo. « Uniqueness results for noncoercive nonlinear elliptic equations with two lower order terms ». Dans : *Commun. Pure Appl. Anal.* 7.1 (2008), p. 163–192.

[G14] D. Blanchard, O. Guibé et H. Redwane. « Nonlinear equations with unbounded heat conduction and integrable data ». Dans : *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 187.3 (2008), p. 405–433.

[G15] O. Guibé. « Uniqueness of the renormalized solution to a class of nonlinear elliptic equations ». Dans : *On the notions of solution to nonlinear elliptic problems : results and developments*. Sous la dir. d'A. Alvino, A. Mercaldo, F. Murat et I. Peral. T. 23. Quad. Mat. Department of Mathematics, Seconda Università di Napoli, Caserta, 2008, p. 255–282.

[G16] A. Attaoui, D. Blanchard et O. Guibé. « Weak-renormalized solution for a nonlinear Boussinesq system ». Dans : *Differential Integral Equations* 22.5-6 (2009), p. 465–494.

[G17] R. Di Nardo, F. Feo et O. Guibé. « Existence result for nonlinear parabolic equations with lower order terms ». À paraître dans *Anal. Appl. (Singap.)* 2011.

# Bibliographie


[ABFOT03] A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina et G. Trombetti. « Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity ». Dans : *Ann. Mat. Pura Appl.* 182.IV (2003), p. 37–52.

[ACMM10] A. Alvino, A. Cianchi, V. G. Maz'ya et A. Mercaldo. « Well-posed elliptic Neumann problems involving irregular data and domains ». Dans : *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis* 27.4 (2010), p. 1017–1054.

[AFT98] A. Alvino, V. Ferone et G. Trombetti. « A priori estimates for a class of non-uniformly elliptic equations ». Dans : *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 46.suppl. (1998). Dedicated to Prof. C. Vinti (Italian) (Perugia, 1996), p. 381–391.

[AC96] N. André et M. Chipot. « A remark on uniqueness for quasilinear elliptic equations ». Dans : *Singularities and differential equations (Warsaw, 1993)*. T. 33. Banach Center Publ. Warsaw : Polish Acad. Sci., 1996, p. 9–18.

[Art86] M. Artola. « Sur une classe de problèmes paraboliques quasi-linéaires ». Dans : *Boll. Un. Mat. Ital. B (6)* 5.1 (1986), p. 51–70.

[BCA01] M. Ben Cheikh Ali. « Homogénéisation des solutions renormalisées dans des domaines perforés ». Thèse de doct. Université de Rouen, 2001.

[BBGGPV95] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre et J. Vázquez. « An $L^1$-Theory of Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations ». Dans : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 22 (1995), p. 241–273.

[BMPT95] C. Bernardi, B. Métivet et B. Pernaud-Thomas. « Couplage des équations de Navier-Stokes et de la chaleur : le modèle et son approximation par éléments finis ». Dans : *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 29.7 (1995), p. 871–921.

[BMMP02] M. F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat et M. M. Porzio. « Uniqueness of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with a lower order term and right-hand side in $L^1(\Omega)$ ». Dans : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 8 (2002). A tribute to J. L. Lions, 239–272 (electronic).

[BMMP03] M. F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat et M. M. Porzio. « Existence of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with a lower-order term and right-hand side a measure ». Dans : *J. Math. Pures Appl. (9)* 82.1 (2003), p. 90–124.

[BMMP05] M. F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat et M. M. Porzio. « Uniqueness results for nonlinear elliptic equations with a lower order term ». Dans : *Nonlinear Anal.* 63.2 (2005), p. 153–170.

[Bla93] D. Blanchard. « Truncations and monotonicity methods for parabolic equations ». Dans : *Nonlinear Anal.* 21.10 (1993), p. 725–743.

[BM97] D. Blanchard et F. Murat. « Renormalized solutions of nonlinear parabolic problems with $L^1$ data : existence and uniqueness ». Dans : *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math* 127 (1997).

[BMR99] D. Blanchard, F. Murat et H. Redwane. « Solution renormalisée pour une classe de problèmes d'évolution non linéaires ». Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris* (1999).

[BMR01] D. Blanchard, F. Murat et H. Redwane. « Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems ». Dans : *J. Differential Equations* 177.2 (2001), p. 331–374.

[BP01] D. Blanchard et A. Porretta. « Nonlinear parabolic equations with natural growth terms and measure initial data ». Dans : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 30.3-4 (2001), 583–622 (2002).

[BP05] D. Blanchard et A. Porretta. « Stefan problems with nonlinear diffusion and convection ». Dans : *J. Differential Equations* 210.2 (2005), p. 383–428.

[BR98] D. Blanchard et H. Redwane. « Renormalized solutions for a class of nonlinear evolution problems ». Dans : *J. Math. Pures Appl.* 77 (1998), p. 117–151.

[BR02] D. Blanchard et H. Redwane. « Quasilinear diffusion problems with singular coefficients with respect to the unknown ». Dans : *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 132.5 (2002), p. 1105–1132.

[Boc] L. Boccardo. « Some Dirichlet problems with lower order terms in divergence form ». Preprint.

[Boc96] L. Boccardo. « Some nonlinear Dirichlet problems in $L^1$ involving lower order terms in divergence form ». Dans : *Progress in elliptic and parabolic partial differential equations (Capri, 1994)*. T. 350. Pitman Res. Notes Math. Ser. Harlow : Longman, 1996, p. 43–57.

[BDO98] L. Boccardo, A. Dall'Aglio et L. Orsina. « Existence and regularity results for some elliptic equations with degenerate coercivity ». Dans : *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 46.suppl. (1998). Dedicated to Prof. C. Vinti (Italian) (Perugia, 1996), p. 51–81.

[BDGM93] L. Boccardo, J. Diaz, D. Giachetti et F. Murat. « Existence and regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivations of nonlinear terms ». Dans : *J. Diff. Eq.* 106 (1993), p. 215–237.

[BG89] L. Boccardo et T. Gallouët. « On some nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data ». Dans : *J. Funct. Anal.* 87 (1989), p. 149–169.

[BG92] L. Boccardo et T. Gallouët. « Nonlinear elliptic equation with right hand side measure ». Dans : *Commun.In Partial Differential Equations.* 3&4 (1992), p. 641–655.

[BGM92] L. Boccardo, T. Gallouët et F. Murat. « Unicité de la solution de certaines équations elliptiques non linéaires ». Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 315.11 (1992), p. 1159–1164.

[BGO96] L. Boccardo, T. Gallouët et L. Orsina. « Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data ». Dans : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 13.5 (1996), p. 539–551.

[BOP03] L. Boccardo, L. Orsina et A. Porretta. « Some noncoercive parabolic equations with lower order terms in divergence form ». Dans : *J. Evol. Equ.* 3.3 (2003). Dedicated to Philippe Bénilan, p. 407–418.

[BSLT01] L. Boccardo, S. Segura de León et C. Trombetti. « Bounded and unbounded solutions for a class of quasi-linear elliptic problems with a quadratic gradient term ». Dans : *J. Math. Pures Appl. (9)* 80.9 (2001), p. 919–940.

[BM73] G. Bottaro et M. Marina. « Problemi di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati ». Dans : *Boll. Un. Mat. Ital.* 8 (1973), p. 46–56.

[CC85] J. Carrillo et M. Chipot. « On some nonlinear elliptic equations involving derivatives of the nonlinearity ». Dans : *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 100.3-4 (1985), p. 281–294.

[CDMP07] J. Casado-Díaz, F. Murat et A. Porretta. « Uniqueness results for pseudomonotone problems with $p > 2$ ». Dans : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 344.8 (2007), p. 487–492.

[ChMu89] N. Charalambakis et F. Murat. « Weak solutions to the initial-boundary value problem for the shearing of nonhomogeneous thermoviscoplastic materials ». Dans : *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 113.3-4 (1989), p. 257–265.

[ChMu06] N. Charalambakis et F. Murat. « Homogenization of stratified thermoviscoplastic materials ». Dans : *Quart. Appl. Math.* 64.2 (2006), p. 359–399.

[CM89] M. Chipot et G. Michaille. « Uniqueness results and monotonicity properties for strongly nonlinear elliptic variational inequalities ». Dans : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 16.1 (1989), p. 137–166.

[CFC97] B. Climent et E Fernández-Cara. « Existence an uniqueness results for a coupled problem related to the stationary Navier-Stokes ». Dans : *J. Math. Pures Appl.* 9e sér. 76.4 (1997).

[CFC98] B. Climent et E. Fernández-Cara. « Some existence and uniqueness results for a time-dependent coupled problem of the Navier-Stokes kind ». Dans : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 8.4 (1998), p. 603–622.

[Daf82] C. Dafermos. « Global smooth solutions to the initial boundary value problem for the equations of one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity ». Dans : *SIAM J. Math. Anal.* 13.3 (1982), p. 397–408.

[DH82] C. Dafermos et L. Hsiao. « Global smooth thermomechanical processes in one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity ». Dans : *Nonlinear Anal. T.M.A.* 6.5 (1982), p. 435–454.

[DMMOP99] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina et A. Prignet. « Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data ». Dans : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 28.4 (1999), p. 741–808.

[Dal96] A. Dall'Aglio. « Approximated solutions of equations with $L^1$ data. Application to the $H$-convergence of parabolic quasi-linear equations ». Dans : *Ann. Mat. Pura Appl.(4)* 170 (1996), p. 207–240.

[DVP95] T. Del Vecchio et M. M. Porzio. « Existence results for a class of noncoercive Dirichlet problems ». Dans : *Ricerche Mat.* 44.2 (1995), p. 421–438.

[DVP96] T. Del Vecchio et M. R. Posteraro. « Existence and regularity results for nonlinear elliptic equations with measure data ». Dans : *Adv. Differential Equations* 1.5 (1996), p. 899–917.

[DVP98] T. Del Vecchio et M. R. Posteraro. « An existence result for nonlinear and noncoercive problems ». Dans : *Nonlinear Anal.* 31.1-2 (1998), p. 191–206.

[DN10] R. Di Nardo. « Nonlinear parabolic equations with a lower order term and $L^1$ data ». Dans : *Commun. Pure Appl. Anal.* 9.4 (2010), p. 929–942.

[DG98] J.-I Diaz et G. Galiano. « Existence and uniqueness of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion ». Dans : *Topological Methods in Nonlinear Analysis* 11.1 (1998), p. 59–82.

[DL89a] R.-J DiPerna et P.-L Lions. « On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability ». Dans : *Ann of Math* 130.1 (1989), p. 321–366.

[DL89b] R. DiPerna et P.-L. Lions. « Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory ». Dans : *Invent. Math.* 98 (1989), p. 511–547.

[DHM00] G. Dolzmann, N. Hungerbühler et S. Müller. « Uniqueness and maximal regularity for nonlinear elliptic systems of $n$-Laplace type with measure valued right hand side ». Dans : *J. Reine Angew. Math.* 520 (2000), p. 1–35.

[DG01] J. Droniou et T. Gallouët. « A uniqueness result for quasilinear elliptic equations with measures as data ». Dans : *Rend. Mat. Appl. (7)* 21.1-4 (2001), p. 57–86.

[Dron00] J. Droniou. « Solving convection-diffusion equations with mixed, Neumann and Fourier boundary conditions and measures as data, by a duality method ». Dans : *Adv. Differential Equations* 5.10-12 (2000), p. 1341–1396.

[Dron02] J. Droniou. « Non-coercive linear elliptic problems ». Dans : *Potential Anal.* 17.2 (2002), p. 181–203.

[DV09] J. Droniou et J.-L. Vázquez. « Noncoercive convection-diffusion elliptic problems with Neumann boundary conditions ». Dans : *Calc. Var. Partial Differential Equations* 34.4 (2009), p. 413–434.

[Fra84] G. Francfort. « Homogenization and Linear Thermoelasticity ». Dans : *SIAM J. Math. Anal.* 14.4 (1984), p. 696–708.

[FS86] G. Francfort et P. Suquet. « Homogenization and Mechanical Dissipation in Thermoviscoelasticity ». Dans : *Arch. Rational Mech. Anal.* 96.3 (1986), p. 265–293.

[FST91] M. Fukushima, K. Sato et S. Taniguchi. « On the closable parts of pre-Dirichlet forms and the fine supports of underlying measures ». Dans : *Osaka J. Math.* 28.3 (1991), p. 517–535.

[GVOG03] C. García Vázquez et F. Ortegón Gallego. « An elliptic equation with blowing-up diffusion and data in $L^1$ : existence and uniqueness ». Dans : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 13.9 (2003), p. 1351–1377.

[Ger73] P. Germain. *Cours de Mécanique des Milieux Continus, tome 1 : théorie générale*. Masson et Cie, Paris, 1973.

[GIS97] L. Greco, T. Iwaniec et C. Sbordone. « Inverting the $p$-harmonic operator ». Dans : *Manuscripta Math.* 92.2 (1997), p. 249–258.

[Lia92] J. Liang. « Weakly-coercive quasilinear elliptic equations with inhomogenous measure data ». Dans : *Progress in partial differential equations : elliptic and parabolic problems*. T. 266. Pitman Research Notes in Math, 1992.

[Lio69] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*. Paris : Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[Lio96] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 1 : Incompressible Models*. Oxford lecture series in mathematics et its applications.3., 1996.

[LM] P.-L. Lions et F. Murat. « Solutions renormalisées d'équations elliptiques ». (manuscrit).

[Mur93] F. Murat. *Soluciones renormalizadas de EDP elipticas non lineales.* Rap. tech. R93023. Cours à l'Université de Séville. Paris VI : Laboratoire d'Analyse Numérique, 1993.

[Mur94] F. Murat. « Equations elliptiques non linéaires avec second membre $L^1$ ou mesure ». Dans : *Compte Rendus du 26ème Congrès d'Analyse Numérique*. les Karellis, 1994.

[Ors03] L. Orsina. « Existence results for some elliptic equations with unbounded coefficients ». Dans : *Asymptot. Anal.* 34.3-4 (2003), p. 187–198.

[Por98] A. Porretta. « Uniqueness and homogenization for a class of noncoercive operators in divergence form ». Dans : *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 46.suppl. (1998). Dedicated to Prof. C. Vinti (Italian) (Perugia, 1996), p. 915–936.

[Por99] A. Porretta. « Existence results for nonlinear parabolic equations via strong convergence of truncations ». Dans : *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 177 (1999), p. 143–172.

[Por04] A. Porretta. « Uniqueness of solutions for nonlinear elliptic Dirichlet problems with $L^1$ data ». Dans : *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 11.4 (2004), p. 407–430.

[Porz99] M. M. Porzio. « Existence of solutions for some "noncoercive" parabolic equations ». Dans : *Discrete Contin. Dynam. Systems* 5.3 (1999), p. 553–568.

[Pri95] A. Prignet. « Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with righthand side measure. » Dans : *Rendiconti di Matematica.* 15 (1995), p. 321–337.

[Pri97] A. Prignet. « Conditions aux limites non homogènes pour des problèmes elliptiques avec second membre mesure ». Dans : *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 6.2 (1997), p. 297–318.

[RSZ93] R. Racke, Y. Shibata et S. Zheng. « Global solvability and exponential stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity ». Dans : *Q. Appl. Math* 51.4 (1993), p. 751–763.

[RZ97] R. Racke et S. Zheng. « Global existence and asymptotic behavior in nonlinear thermoviscoelasticity ». Dans : *J. Differ. Equations* 134.1 (1997), p. 46–67.

[Rou09] T. Roubíček. « Thermo-visco-elasticity at small strains with $L^1$-data ». Dans : *Quart. Appl. Math.* 67.1 (2009), p. 47–71.

[Ser64] J. Serrin. « Pathological solution of elliptic differential equations ». Dans : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 18 (1964), p. 385–387.

[Sta65] G. Stampacchia. « Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus ». Dans : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 15.fasc. 1 (1965), p. 189–258.

[Tem84] R. Temam. *Navier-Stokes equations, Theory and Numerical Analysis, 3rd revised edition*. Amsterdam : North-Holland, 1984.

[Váz95] J. L. Vázquez. « Equivalenza tra Entropia, SOLA e Rinormalizzata ». Dans : Proceedings Fès. 1995.

[Váz07] J. L. Vázquez. *The porous medium equation*. Oxford Mathematical Monographs. Mathematical theory. Oxford : The Clarendon Press Oxford University Press, 2007, p. xxii+624.

[Zim04] J. Zimmer. « Global existence for a nonlinear system in thermoviscoelasticity with nonconvex energy ». Dans : *J. Math. Anal. Appl.* 292.2 (2004), p. 589–604.