UNIVERSITÉ DE ROUEN

Maîtrise de mathématiques

Unité MM5/MIM1

Année 2000–2001

Examen du 23 janvier 2001

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Il sera tenu compte de la précision des raisonnements, ainsi que de la clarté de la présentation des calculs.

Problème I

Soit $\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 > 0\}$. On fixe $u \in H^1(\mathbb{R}^2_+)$. On pose

$$u^*(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) \quad \text{si } x_2 > 0, \qquad u^*(x_1, x_2) = u(x_1, -x_2) \quad \text{si } x_2 < 0. \tag{1}$$

On veut montrer qu'on a (au sens des distributions)

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) \quad \text{si } x_2 > 0, \qquad \frac{\partial u^*}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, -x_2) \quad \text{si } x_2 < 0 \tag{2}$$

et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^2_+)$, on a

$$\|\frac{\partial u^*}{\partial x_1}\|_{L^2(R^2)} \leq C \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)}. \tag{3}$$

1. Soit $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\zeta(t) = 0 \quad \text{si } t < 1, \qquad \zeta(t) = 1 \quad \text{si } t > 2.$$

On pose $\zeta_k(t) = \zeta(kt)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on pose $\varphi_k(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)\zeta_k(x_2)$.

a. Montrer que $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} u\, \zeta_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2_+} u \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 = -\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi_k dx_1\, dx_2. \tag{4}$$

b. Montrer qu'on peut passer à la limite pout $k \to \infty$ dans (4) et que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 = -\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi\, dx_1\, dx_2.$$

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

a. Montrer que d'après la définition (1) on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2_+} u \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1\, dx_2,$$

où $\varphi_1(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_1, -x_2)$.

b. En utilisant l'étape 1, en déduire que la dérivée au sens des distributions $\frac{\partial u^*}{\partial x_1}$ est donnée par (2).

c. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^2_+)$, on a (3).

Problème II

On considère l'ouvert $\Omega =]0,1[^2$ (voir la figure 1). L'intégrale d'une fonction sur $\partial\Omega$ est simplement donnée par

$$\int_{\partial\Omega} f\, d\sigma = \int_0^1 \big(f(x,0) + f(x,1)\big)\, dx + \int_0^1 \big(f(0,y) + f(1,y)\big)\, dy.$$

On note que la continuité de la trace s'interprète ici comme la continuité des applications suivantes de $H^1(\Omega)$ dans $L^2([0,1])$

$$\gamma_1 : u \mapsto u(0,\cdot), \qquad \gamma_2 : u \mapsto u(\cdot,0), \qquad \gamma_3 : u \mapsto u(1,\cdot), \qquad \gamma_4 : u \mapsto u(\cdot,1).$$

On pose

$$H^1_{\text{per}}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u(\cdot,0) = u(\cdot,1) \text{ p.p.},\ u(0,\cdot) = u(1,\cdot) \text{ p.p.}\}.$$

1. Problème variationnel

On fixe $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème variationnel

$$\text{trouver } u \in H^1_{\text{per}}(\Omega) \text{ tel que } \qquad \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \text{pour tout } v \in H^1_{\text{per}}(\Omega).$$

a. Montrer que $H^1_{\text{per}}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$.

b. Montrer que le problème variationnel admet une unique solution.

c. On suppose qu'il existe une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que

$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad u(\cdot,0) = u(\cdot,1),\ u(0,\cdot) = u(1,\cdot),\ u_y(\cdot,0) = u_y(\cdot,1),\ u_x(0,\cdot) = u_x(1,\cdot).$$

Montrer que u est solution du problème variationnel.

d. En déduire la solution du problème variationnel lorsque $f \equiv 1$.

2. Espace fonctionnel approché

On pose $h = 1/2$ et on associe la triangulation de Ω donnée à la figure 2. On note W_h l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ affines sur chaque triangle et $(\omega_i)_{1\le i\le 9}$ la base canonique de W_h. On pose $V_h = W_h \cap H^1_{\text{per}}(\Omega)$.

On définit

$$\widetilde{\omega}_1 = \omega_1 + \omega_5 + \omega_7 + \omega_9, \quad \widetilde{\omega}_2 = \omega_2 + \omega_8, \quad \widetilde{\omega}_3 = \omega_3 + \omega_6, \quad \widetilde{\omega}_4 = \omega_4.$$

a. Dessiner les supports de $\widetilde{\omega}_1$, $\widetilde{\omega}_2$, $\widetilde{\omega}_3$, $\widetilde{\omega}_4$ sur quatre figures différentes.

b. Montrer que la famille $(\widetilde{\omega}_i)_{1\le i\le 4}$ est contenue dans V_h.

c. Montrer que la famille $(\widetilde{\omega}_i)_{1\le i\le 4}$ est libre.

d. Montrer que la famille $(\widetilde{\omega}_i)_{1\le i\le 4}$ est une base de V_h.

e. Montrer que la fonction $v_h(x,y) = |x - \frac{1}{2}|$ est dans V_h. Quelles sont ses coordonnées dans la base $(\widetilde{\omega}_i)_{1\le i\le 4}$?

3. Problème variationnel approché

On note λ_1, λ_2, λ_3 la base canonique associée au triangle de référence de la figure 3. On rappelle l'expression du vecteur $m = (\int_T \lambda_i)$ et des matrices $K = \big(\int_T (\nabla\lambda_i, \nabla\lambda_j)\big)_{i,j}$ et $L = (\int_T \lambda_i\lambda_j)_{i,j}$

$$m = \frac{h^2}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix}1 & -\frac12 & -\frac12\\ -\frac12 & \frac12 & 0\\ -\frac12 & 0 & \frac12\end{pmatrix}, \qquad L = \frac{h^2}{24}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

a. Calculer le vecteur $c = (\int_\Omega \widetilde{\omega}_i)_{1\le i\le 4}$.

b. Calculer la matrice $A = \big(\int_\Omega (\nabla\widetilde{\omega}_i, \nabla\widetilde{\omega}_j)\big)_{i,j}$. [On utilisera les figures de la question 2.a.]

c. Calculer la matrice $B = (\int_\Omega \widetilde{\omega}_i\widetilde{\omega}_j)_{i,j}$.

d. Que représente le vecteur ξ solution du système linéaire $(A+B)\xi = c$?