UNIVERSITÉ DE ROUEN

Maîtrise de mathématiques

Unité MM5/MIM1

Année 2001–2002

**Examen du 4 septembre 2002**

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Il sera tenu compte de la précision des raisonnements, ainsi que de la clarté de la présentation des calculs.

## Problème I

**1)** Soit $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, à support dans un même compact $K$. Rappeller d'abord la notion de convergence de la suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Donner ensuite la définition d'une distribution sur $\mathbb{R}$.

**2)** Montrer que pour tout $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ la quantité

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \left(\varphi(1+\frac{1}{p}) + \varphi'(1+\frac{1}{p})\right)$$

est finie.

**3)** Démontrer que l'application :

$$T \ : \ \varphi \in \ \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \left(\varphi(1+\frac{1}{p}) + \varphi'(1+\frac{1}{p})\right)$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$.

**4)** Est-ce-que

$$T_1 \ : \ \varphi \in \ \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \, \varphi(1+\frac{1}{p})$$

définit une application sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ? (bien justifier la réponse)

## Problème II

Soit $\Omega$ un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$ et $n = (n_1, n_2)$ le vecteur unité de la normale extérieure à $\partial\Omega$. On introduit la matrice de fonctions $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq 2}$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2+\sin^2 x & -1 \\ 3-\cos x & 4-\sin^2 x \end{pmatrix}$$

et on considère le problème de Neumann

$$(1) \qquad \begin{cases} -\text{div } (A\,\nabla u) + u = f \quad \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\, n_i \, \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Pour $f$ donnée dans $(H^1(\Omega))'$, on introduit la formulation variationnelle de ce problème

$$(3)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u,v) = \ \langle f, v\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

où

$$(4)\qquad a(u,v) = \int_\Omega A\nabla u \ \nabla v \ dx + \int_\Omega u\, v\ dx, \quad \forall u,\, v \in H^1(\Omega).$$

**1.** Démontrer qu'il existe un nombre $\alpha$ strictement positif tel que

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geq \alpha\ |\lambda|^2, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^2 \text{ et pour tout } x \in \Omega.$$

**2.** Montrer que le problème (3) admet une solution unique.

## Problème III

On considère le problème variationnel

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1_0(]0,1[) \text{ telle que} \\ \displaystyle\int_0^1 u'(x)v'(x)\ dx + 2\int_0^1 u'(x)v(x)\ dx = \int_0^1 v(x)\ dx \quad \forall v \in H^1_0(]0,1[). \end{cases}$$

**1. Formulation variationnelle**

**a.** Montrer que $\int_0^1 u'(x)u(x)\ dx = 0$ pour tout $u \in H^1_0(]0,1[)$.

**b.** Démontrer qu'alors le problème variationnel (1) admet une unique solution $u$.

**c.** La solution du problème variationnel est-elle solution d'un problème de minimisation?

**d.** Montrer que $u$ est solution d'une équation différentielle avec des conditions aux limites en 0 et 1. On admettra que $u \in C^\infty([0,1])$.

**2. Formulation variationnelle approchée**

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{1}{N+1}$, on considère le maillage uniforme $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N+1$. On note $V_h$ l'espace d'approximation associé constitué des fonctions continues sur $[0,1]$, affines sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq N-1$ et nulles au points 0 et 1. On munit $V_h$ de sa base canonique $\{\omega_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ caractérisée par $\omega_i(x_j) = \delta_{ij}$. On note enfin $u_h$ la solution du problème variationnel approché et $A_h\xi = b_h$ le système satisfait par les coordonnées $\xi$ de $u_h$ dans la base $\{\omega_i\}$.

**a.** Calculer la matrice $A_h$.

**b.** Calculer le vecteur $b_h$.

**c.** Comment peut-on estimer $\|u - u_h\|_{H^1}$ en fonction de $h$ ?