Oral

Exercice obligatoire. Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie et a, b deux réels tels que $a \neq b$. Soit f un endomorphisme de E tel que $(f - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0$.

(1) Établir l'existence de λ et μ réels non nuls tels que $\lambda(f - a\,\mathrm{Id}_E)$ et $\mu(f - b\,\mathrm{Id}_E)$ soient des projecteurs ($p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur ssi $p \circ p = p$).

(2) Montrer que $\mathrm{Im}(f - b\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{Id}_E)$.

(3) Calculer f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(4) Si $ab \neq 0$, montrer que f est inversible et calculer f^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E.

(1) À quelle condition il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Id}_E - \alpha f$ soit non inversible ?

(2) Montrer que si $\mathrm{Id}_E - f \circ g$ est inversible alors $\big(\mathrm{Id}_E - f \circ g\big) \circ \big(Id + g \circ (\mathrm{Id}_E - f \circ g)^{-1} \circ f\big) = \mathrm{Id}_E$.

(3) En déduire que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ (base orthonormale). Soit f un endomorphisme de E qui commute avec toute isométrie vectorielle. On se propose de montrer que f est une homothétie c'est–à–dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

(1) Soit $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Considérons l'endomorphisme u_i défini par : $u_i(e_i) = e_i$ et $u_i(e_j) = -e_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, 4\}$ tel que $i \neq j$.

-a- Montrer que u_i est une isométrie vectorielle.

-b- En utilisant le fait que $f \circ u_i = u_i \circ f$ montrer qu'il existe ω_i tel que $f(e_i) = w_i e_i$.

-c- En déduire que la matrice, M, associée à f dans la base canonique est diagonale

(2) Il reste à démontrer que les coefficients diagonaux de M sont tous égaux. Pour ceci trouver des isométries vectorielles particulières de E et utiliser le fait que f commute avec toute isométrie vectorielle de E.

Exercice 3. Soit q la forme quadratique définie dans $\mathbb{R}^3$ par, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2$$

(1) Déterminer la matrice – dans la base canonique – de la forme bilinéaire symétrique f associée à q.

(2) Appliquer la méthode de Gauss et donner la signature de q.

(3) Donner une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ relativement à f.

Exercice 4.

(1) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang des matrices A, B et C. Quelles sont celles qui sont diagonalisables ?

(2) D'une façon générale montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n. Soient a et b deux réels. On pose pour tout P élément de E :

$$L(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$$

(1) Montrer que L est un endomorphisme de E.

(2) On suppose a et b distincts. Étudier les éléments propres de L. L'application L est-elle inversible ? diagonalisable ?

(3) Reprendre la question (2) dans le cas où $a = b$.