Université de Rouen
L3 Mathématiques
Année 2010-2011

Mathématiques. Fiche TD/TP n°1
Intégration numérique

MÉTHODES USUELLES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Dans la suite f sera une fonction définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et suffisamment régulière. Pour $N \geq 1$, on pose $h = \frac{b-a}{N}$ le pas de discrétisation de l'intervalle $[a,b]$ et pour $i = 0 \dots N$, $x_i = a + i * h$.

Exercice 1. Trapèzes

Écrire un algorithme amélioré pour la méthode des trapèzes. Compter le nombre d'opérations (+, - et *, /). Rappel :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt \simeq \frac{h}{2}\Big(f(x_i) + f(x_{i+1})\Big).$$

Exercice 2. Simpson

(a) Écrire un algorithme direct pour la méthode de Simpson. Compter le nombre d'opérations. Rappel :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt \simeq \frac{h}{6}\Big(f(x_i) + 4 * f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big) + f(x_{i+1})\Big).$$

(b) Ecrire un algorithme amélioré. Compter le nombre d'opérations.

Exercice 3. Scilab

(a) Écrire deux routines `trap(f,a,b,n)` et `simpson(f,a,b,n)`.

(b) Essayer de « vectoriser » vos routines pour améliorer les performances.

(c) Tester vos routines sur des exemples d'intégrales dont vous pouvez calculer la valeur.

(d) Soit $I(f) = \int_{-1}^{1} 20(1-x^2)^3\,dx$. Le but est de comparer les deux méthodes composites et de vérifier que l'erreur est conforme aux prévisions. Si $T(f,h)$ et $S(f,h)$ désignent respectivement les formules composites des trapèzes et de Simpson,

$$T(f,N) = h\Big(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2}\Big),$$

$$S(f,N) = \frac{h}{6}\Big(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + 4\sum_{k=0}^{N-1} f\Big(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big) + f(x_N)\Big),$$

on rappelle qu'il existe ξ_1 et ξ_2 tels que

$$|I(f) - T(f,h)| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\xi_1)|,$$

$$|I(f) - S(f,h)| = \frac{b-a}{180}\frac{h^4}{2^4}|f^{(4)}(\xi_2)|.$$

L'erreur est donc prévisible si f est assez régulière et à condition de connaître f'' ou $f^{(4)}$, ce qui n'est pas toujours le cas (on fait alors des méthodes dites adaptatives).

Avec Scilab, pour les valeurs $N = 2, 4, 8, \ldots, 512, 1024$ calculer l'erreur exacte pour chaque méthode et tracer sur un même graphique à double échelle logarithmique $(n, \text{Erreur}(n))$. Tracer sur ce même graphique (n, n^{-2}) et (n, n^{-4}). Conclure.

MÉTHODE DE ROMBERG

La méthode de Romberg est un cas particulier de l'extrapolation de Richardson appliquée à la méthode composite des trapèzes et permet, à peu de frais, d'améliorer l'approximation. Nous admettrons que si f est suffisamment régulière alors pour tout $n \geq 1$ (attention ce n'est pas le N lié au pas de discrétisation $h = (b-a)/N$),

$$T(f,h) = \int_a^b f(t)\,dt + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \cdots + \alpha_n h^{2n} + O(h^{2n+2}). \quad (1)$$

Les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont évidemment inconnus et dépendent de f. Grosso modo l'idée du procédé d'extrapolation de Richardson est par exemple pour $n = 3$ d'évaluer $T(f, h)$ pour quatre valeurs différentes h_0, h_1, h_2, h_3 et de calculer en 0 la valeur du polynôme d'interpolation de Lagrange passant par $(h_i, T(f, h_i))$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si tout se passe bien et comme par continuité $T(f, 0) = \int_a^b f(t)dt$, la valeur obtenue est plus précise que celles calculées en h_0, h_1, h_2, h_3. Le calcul du polynôme d'interpolation de Lagrange n'est pas nécessaire, il suffit d'utiliser l'algorithme de Neville (version en un point des différences divisées de Newton).

La méthode de Romberg consiste à prendre $h_0 = h$, $h_1 = \dfrac{h}{2}$, $h_2 = \dfrac{h}{2^2}$, $\dots$, $h_n = \dfrac{h}{2^n}$ et les calculs sont assez simples. Soient $h = (b-a)/N$ et $n \geq 1$ fixés. On définit $R(i,k)$ pour $0 \leq k \leq n$ et $k \leq i \leq n$:

$$R(i,0) = T(f, h2^{-i}), \quad 0 \leq i \leq n$$
$$R(i,k+1) = \frac{4^{k+1}R(i,k) - R(i-1,k)}{4^{k+1}-1} \quad 0 \leq k \leq n-1 \text{ et } k+1 \leq i \leq n.$$

On présente généralement ces valeurs par le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
R(0,0) \arrow[dr] & & & & & \\
R(1,0) \arrow[r] \arrow[dr] & R(1,1) \arrow[dr] & & & & \\
R(2,0) \arrow[r] \arrow[dr] & R(2,1) \arrow[r] \arrow[dr] & R(2,2) \arrow[dr] & & & \\
\vdots & & & & & \\
\vdots \arrow[dr] & & & & \arrow[dr] & \\
R(n,0) \arrow[r] & R(n,1) \arrow[r] & R(n,2) \arrow[r] & \cdots & \cdots \arrow[r] & R(n,n)
\end{tikzcd}$$

Exercice 4. Pour $h = b - a$ et $n = 1$, vérifier que $R(1,1)$ est la formule de quadrature élémentaire de Simpson.

Exercice 5. [Du calcul !] D'après la formule (1) et en ajoutant un indice

$$R(i,0) = \int_a^b f(t)dt + \alpha_{1,0}\big(h2^{-i}\big)^2 + \dots + \alpha_{n,0}\big(h2^{-i}\big)^{2n} + O(h^{2n+2}). \tag{2}$$

Montrer par récurrence que pour tout $0 \leq k \leq n-2$ et $k+1 \leq i \leq n$

$$R(i,k+1) = \int_a^b f(t)dt + \alpha_{k+2,k+1}\big(h2^{-i}\big)^{2(k+2)} + \dots + \alpha_{n,k+1}\big(h2^{-i}\big)^{2n} + O(h^{2n+2}) \tag{3}$$

et que

$$R(n,n) = \int_a^b f(t)dt + O(h^{2n+2}).$$

Exercice 6. [Scilab] Écrire une routine `romberg(f,a,b,N,n)` qui retourne le tableau des $R(i,k)$. Il faut remarquer que les $R(i,k)$ forment un tableau triangulaire (il y a donc une partie du tableau qui n'est pas utilisée). Tester cette routine sur un exemple avec $n = 5$ et vérifier que l'approximation s'améliore. Proposer une routine optimisée qui calcule $R(n,n)$. Pour la fonction $f(x) = \exp(1)$, $N = 1$

et $n = 5$ voici le tableau obtenu

$$\begin{pmatrix} 1.8591409 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7539311 & 1.7188612 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7272219 & 1.7183188 & 1.7182827 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7205186 & 1.7182842 & 1.7182818 & 1.7182818 & 0 & 0 \\ 1.7188411 & 1.718282 & 1.7182818 & 1.7182818 & 1.7182818 & 0 \\ 1.7184217 & 1.7182818 & 1.7182818 & 1.7182818 & 1.7182818 & 1.7182818 \end{pmatrix}.$$

Une des difficultés pour adapter la définition de $R(i,k)$ en routine Scilab vient des indices. Ici $R(i,k)$ est défini pour $0 \le k \le n$ et $k \le i \le n$ alors que sous Scilab une matrice (ou un tableau) a ses indices de ligne et colonne commençant à 1 (et pas 0). Il y a donc un décalage des indices. Le tableau retourné sera de taille $n+1 \times n+1$.

Exercice 7. [Des idées pour la suite]
- un autre choix de suite h_i (suite de Burlisch)
- méthode adaptative de Simpson