Université de Rouen
Faculté des Sciences

Licence de Mathématiques. Topologie 1993-1994

T.D. de TOPOLOGIE - Fiche No 6 : COMPACITE

Sauf mention contraire, dans toute la fiche, E désigne un espace topologique séparé.

Exercice 1 : Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et x un élément de E. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, alors $\{x, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ est un compact de E.

Exercice 2 : Soient A et B deux parties de E. Montrer que :
- $a)$ si A est compacte et $x \notin A$, alors x et A admettent des voisinages ouverts disjoints.
- $b)$ si A et B sont compactes et disjointes, alors A et B admettent des voisinages ouverts disjoints.

Exercice 3 : Soient $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E.
Montrer que :
- $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide de E.
- si un ouvert contient K, il contient aussi un des K_n.

Exercice 4 : Soient $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne notée d, et A un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a)$.
- Montrer que $\forall x$, il existe un point a_x de A tel que $d(x, a_x) = d(x, A)$.

Exercice 5 : Soit (E, d) un espace métrique. Pour des parties A et B non vides de E. On pose : $d(A, B) = \inf \big\{d(a, b)/\ a \in A,\ b \in B\big\}$. Montrer que :
- $a)$ on peut avoir $d(A, B) = 0$ avec A et B fermés et disjoints.
- $b)$ si A est compact et B fermé, alors $\Big(d(A, B) = 0 \;\Rightarrow\; A \cap B \neq \emptyset\Big)$.
- $c)$ si A et B sont des compacts, alors il existe $a\in A$, $b\in B$ tels que $d(a, b) = d(A, B)$.

Exercice 6 : Soient E et F séparés, A un compact de E, B un compact de F. Montrer que :
- $a)$ $A\times B$ est une partie compacte de $E\times F$ pour la topologie produit.
- $b)$ faire une démonstration plus simple de $a)$ quand E et F sont métriques.
- $c)$ si W est un ouvert de $E\times F$ contenant $A\times B$, alors il existe U ouvert de E, V ouvert de F vérifiant $A \subset U$, $B \subset V$ et $U\times V \subset E\times F$.

Exercice 7 : Soient E un espace vectoriel normé, A une partie compacte et B une partie fermée de E. Montrer que :
- $A+B$ est fermé dans E.
- si de plus B est compacte, alors $A+B$ est compacte.

Exercice 8 : Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
- (i) E est un espace localement compact.
- (ii) soient $x \in E$, et $V \in \mathcal{V}(x)$; montrer qu'il existe un ouvert U de E relativement compact tel que : $x \in U$ et $\overline{U} \subset V$.
- (iii) la topologie de E admet une base constituée d'ouverts relativement compacts.

Exercice 9 : Soit X un espace localement compact :
- soit $x \in X$ et F un fermé de X ne contenant pas x. Montrer qu'il existe deux ouverts de X disjoints U_1 et U_2 tels que $x \in U_1$ et $F \subset U_2$.
- toute partie compacte de E admet une base de voisinages relativement compacts.

Exercice 10 : Soit (E, d) un espace métrique vérifiant : pour tout $x \in E$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B(x, \varepsilon)}$ soit compact. Montrer que E est localement compact.

Exercice 11 : Soit E un espace localement compact. Montrer que si A est un fermée de E, alors A est un sous-espace localement compact de E. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 12 : Montrer que tout ouvert d'un espace compact est un sous-espace localement compact.

Exercice 13 : Soient A, B deux parties de E vérifiant $B \subset A$. Comparer les 2 propositions suivantes :

(i) B est relativement compact dans E.

(ii) B est relativement compact dans A.

Exercice 14 : Soient (E, d_1) un espace métrique compact et d_2 une distance sur E. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $d_2 < k.d_1$. Comparer les topologies induites sur E par les distances d_1 et d_2.

Exercice 15 : Soient $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$, 3 topologies définies sur un ensemble X telles que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_3$ et telles que $(E, \mathcal{T}_2)$ soit compact. Montrer que :

- si $\mathcal{T}_1$ est séparée, alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.
- si $\mathcal{T}_3 \neq \mathcal{T}_2$, alors $(E, \mathcal{T}_3)$ n'est pas compact.

CONTINUITE ET COMPACITE

Exercice 16 : Montrer qu'une application f continue d'un espace compact E dans un espace séparé F est fermée (i.e l'image d'un fermé est un fermé). En déduire que si f est une bijection continue de E dans F, alors c'est un homéomorphisme.

Exercice 17 : Soient E un espace topologique séparé, F un espace compact et A une partie fermée de $E \times F$. Montrer que la projection de A sur E est fermée. Donner un contre-exemple avec F non compact, où la projection d'un fermé de $E \times F$ sur E, n'est pas un fermé de E. En déduire qu'une application f de E dans F est continue si et seulement si le graphe de f est fermé dans $E \times F$.

Exercice 18 : Soit F un espace métrique. On suppose que pour tout espace métrique E et toute partie fermée A de $E \times F$, la projection de A sur E est fermée. Montrer alors que F est compact. (Prendre une suite de F et $E = \{\emptyset\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.)

Exercice 19 : Soient E et F deux espaces topologiques séparés et f une application de E dans F vérifiant : pour tout compact K de E, la restriction f_K de f à K est continue.

L'application f est-telle continue si :

$a)$ E et F sont quelconques ?

$b)$ E et F sont métriques ?

$c)$ E est localement compact ?

Exercice 20 : Soient E et F deux espaces topologiques séparés et f une application injective de E dans F et vérifiant : pour tout compact K de E, $f(K)$ est un compact de F.

L'application f est-telle continue si :

$a)$ E et F sont quelconques ?

$b)$ E et F sont métriques ?

$c)$ E est localement compact ? Trouver un contre-exemple avec f non injective.

Exercice 21 : Soient E un espace topologique localement compact, F un espace topologique séparé et f une application continue de E dans F. L'image $f(E)$ est-elle une partie localement compacte de F ?

Exercice 22 : Soient (E, d) un espace métrique compact et f une application de E dans E. Montrer que si f conserve la distance $\big(d(f(x), f(y)) = d(x, y)\big)$, f est un homéomorphisme.

Exercice 23 : Soient E un espace compact et f une application continue de E dans E. Montrer qu'il existe une partie A fermée non vide de E telle que $f(A) = A$.