Université de Rouen
Faculté des Sciences

Licence de Mathématiques. Topologie 1993-1994

T.D. de TOPOLOGIE - Fiche N^o 7 : CONNEXITÉ

Exercice 1 : L'ensemble $X = \{a, b, c\}$ est-il connexe pour les topologies : $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$ et $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$? Déterminer les composantes connexes de X pour ces topologies.

Exercice 2 : L'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$ est-il connexe pour les topologies : $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$? Le sous-espace $\{b, d, e\}$ est-il connexe ? Quelles sont les composantes connexes des points de X ?

Exercice 3 : Les espaces suivants sont-ils connexes : un espace discret, un espace grossier, un espace cofini, un espace séparé ayant un point isolé, une partie finie d'un espace séparé ? Déterminer les composantes connexes de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle.

Exercice 4 : On suppose $(X, \mathcal{T})$ connexe et une topologie $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. $(X, \mathcal{T}')$ est-il connexe ?

Exercice 5 : Soit A une partie connexe d'un espace topologique X. Les parties suivantes sont-elles connexes : $\overline{A}$, $Fr(A)$, $\mathring{A}$? (considérer dans $\mathbb{R}^2$ la réunion de 2 disques fermés tangents).

Exercice 6 : Soient A une partie de X et B un sous-espace connexe de X qui rencontre A et A^c. Montrer que B rencontre la frontière de A. En déduire que dans un espace métrique E non borné et connexe, les sphères $S(x, r) = \{y \in E / d(x, y) = r\}$, $r > 0$, sont non vides.

Exercice 7 : Soient A et B deux parties non vides d'un espace topologique X.

$a)$ On suppose A et B connexes. $A \cap B$ est-il connexe ? Si de plus $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, montrer que $A \cup B$ est connexe.

$b)$ On suppose que A et B sont fermés et que $A \cup B$ et $A \cap B$ sont connexes. A l'aide d'un exemple sur $\mathbb{R}$, montrer que la conclusion n'est plus valable si A ou B n'est pas fermé.

Exercice 8 : Soient X un espace topologique, Y un espace topologique discret et f une application continue de X dans Y. Montrer que f est constante sur chaque composante connexe de X. En déduire que X est non connexe si et seulement si il existe une surjection continue de X sur $\{0, 1\}$ discret.

Exercice 9 : Montrer que toute partie de X à fois ouverte et fermée contient la composante connexe de chacun de ses points. Montrer que si X a un nombre fini de composantes connexes, celles-ci sont à la fois ouvertes et fermées dans X, et que la réciproque est vraie si X est compact.

Exercice 10 : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties compactes connexes non vides d'un espace topologique X. Montrer que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un compact connexe non vide.

Exercice 11 : Soit (X, d) un espace métrique.

a) Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$; on pose : $\Gamma_{x,\varepsilon} = \{\ y \in X\ /\ \text{il existe une } \varepsilon\text{-chaine de } x \text{ à } y\ \}$. Montrer que $\Gamma_{x,\varepsilon}$ est ouvert et fermé dans X.

b) On suppose que X est compact et soit $\Gamma_x = \bigcap_{\varepsilon>0} \Gamma_{x,\varepsilon}$. Montrer que Γ_x, la composante connexe de x et l'intersection des parties ouvertes et fermées contenant x, sont identiques.

c) Si X est localement compact, montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) pour tout x de X la composante connexe de X est $\{x\}$.

(ii) tout point de X admet une base de voisinages ouverts et fermés.

Exercice 12 : Montrer que $X = \left\{\left(x, \sin \frac{1}{x}\right)\ /\ x \in]0,1]\right\} \cup \left(\{0\} \times [-1,1]\right)$ est un sous-espace compact et connexe de $\mathbb{R}^2$. Est-il localement connexe ?

CONNEXITÉ PAR ARC

Définition : Soit x_0, x_1/inX. On dit que γ est une courbe dans X reliant x_0 et x_1 s'il existe a et b réels tels que γ soit une application continue de $[a, b]$ dans X vérifiant $\gamma(a) = x_0$ et $\gamma(b) = x_1$. L'espace est dit *connexe par arc* si pour tous x_0 et x_1 de X, il existe une courbe dans X reliant x_0 à x_1.

Exercice 13 : Montrer que si X est connexe par arc, alors X est connexe. En déduire que l'ensemble A des points de $\mathbb{R}^2$ ayant au moins une coordonnée rationnelle est connexe.

Exercice 14 : Montrer que tout ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ (plus généralement d'un espace vectoriel normé) est connexe par arc. Cela reste-t-il vrai pour un connexe quelconque ? (voir ex. 12)

Exercice 15 : Soient X et Y deux espaces connexes, A une partie propre de X (*i.e. non vide et différente de X*) et B une partie propre de Y.
Montrer que $(A \times B)^{\mathrm{c}}$ est connexe dans $X \times Y$.
Application : dans $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, le complémentaire d'un pavé borné est connexe.