THÈSE DE DOCTORAT D'UNIVERSITÉ

Discipline : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Analyse Numérique

présentée
à l'Université de Rouen
par

Olivier GUIBÉ

pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

(arrêté ministériel du 30 Mars 1992)

Existence de solutions pour des systèmes couplés non linéaires elliptiques ou d'évolution

Date de soutenance : 27 Janvier 1998

Composition du Jury :

Président	:	**M. Derridj**	Professeur, Université de Rouen
Rapporteurs	:	**T. Gallouët**	Professeur, Université de Provence, Marseille
		F. Murat	Directeur de Recherche CNRS, Paris VI
Directeur de Thèse	:	**D. Blanchard**	Professeur, Université de Rouen
Examinateurs	:	**Y. Brenier**	Professeur, Université de Paris VI
		C. Dellacherie	Directeur de Recherche CNRS, Université de Rouen
		F. Mignot	Professeur, Université de Paris Sud, Orsay

A la mémoire de mon père,

TOUT D'ABORD, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à D. Blanchard. Par sa rigueur mathématique, sa disponibilité et sa bonne humeur, il a su me guider dans ce travail et m'inculquer quelques principes simples que tout apprenti chercheur doit connaître.

F. Murat et T. Gallouët ont accepté d'examiner cette thèse. Leurs travaux ont été pour moi un guide précieux.

M. Derridj, par ses excellents cours d'analyse, a participé à ma formation. Il me fait un grand honneur en participant au jury.

C. Dellacherie a accepté de participer au jury. Dans son vivant atelier destiné aux doctorants, j'ai beaucoup appris, et je me souviens encore d'une colle sur les espaces euclidiens...

Je remercie Y. Brenier et F. Mignot pour l'honneur qu'ils me font en participant au jury.

G. Grancher et O. Benois m'ont initié à TEX. La lettrine de cette page leur est dédiée.

Je trouve ici l'occasion de remercier tous ceux qui, professeurs ou amis, m'ont soutenu pendant mes études. Je pense en particulier à P. Donato, S. Legros, L. Verney, J. Calbrix et T. de la Rue ainsi qu'à tous mes amis doctorants et post-doctorants de l'UPRES-A 6085.

Mes remerciements s'adressent aussi à Régine, Sylvie et Marc pour leur gentillesse et leur efficacité.

Enfin, je destine ce dernier propos à Emmanuelle, qui a su apprécier la mélodie des cliquetis du clavier : sa présence m'a été indispensable et je lui donne rendez-vous le 14.

Table des matières

Introduction

Dans cette thèse nous étudions des systèmes non linéaires elliptiques ou d'évolution issus du modèle de la thermoviscoélasticité suivant,

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left[A\boldsymbol{\varepsilon}\,(u) + B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] + Df(\theta) = g \quad \text{ dans } \Omega \times (0,T),$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}\big(\mathbf{a}(x,t,D\theta)\big) = B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \quad \text{ dans } \Omega \times (0,T),$$

$$\text{(3)} \qquad u(t=0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = v_0, \quad \theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\text{(4)} \qquad u = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T);$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou $N = 3$) et $T > 0$, et on pose $Q = \Omega \times]0,T[$.

Les inconnues sont le champ de déplacement $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$ et le champ de température $\theta : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$. L'équation (1) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Les tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}\,(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}(\nabla \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \frac{\partial u}{\partial t})^t)$ sont respectivement les tenseurs de déformations linéarisés et le tenseur des taux de déformations. Les tenseurs (d'ordre 4) A et B sont les tenseurs d'élasticité et de viscosité et vérifient les hypothèses habituelles de symétrie et coercivité. Le champ de contraintes de Cauchy est donné par $\sigma = A\boldsymbol{\varepsilon}\,(u) + B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)I$ (avec $I_{ij} = \delta_{ij}$) dans lequel $f(\theta)I$ représente la contrainte thermique ; la fonction f étant continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le vecteur $g : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$ représente les efforts extérieurs volumiques appliqués. L'équation (2) est l'équation de conservation de l'énergie dans laquelle le second membre que l'on peut écrire $(\sigma - A\boldsymbol{\varepsilon}\,(u))\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ est la dissipation intrinsèque mécanique dans le milieu (voir par exemple [19] et [30]). Nous prenons une loi de diffusion non linéaire ($\mathbf{a}(x,t,\xi)$ est un opérateur monotone coercif à croissance linéaire à l'infini). La masse volumique (ici constante) est fixée à 1. Dans le cadre de la mécanique des fluides, des systèmes d'évolution non linéaires similaires à (1)–(4) ont été analysés par P.-L Lions dans [24].

La linéarisation du système (1)-(2) autour d'une température constante conduit au système bien connu de la (visco)-thermoélasticité linéaire qui est étudié, par exemple, dans [17] (et la bibliographie de cet article). L'originalité du travail que nous présentons ici résulte de la prise en compte de la non linéarité de la dissipation mécanique dans (2). En supposant que $g \in L^2(\Omega \times (0,T))$, l'analyse du cas très simple où f est bornée montre que le second membre de (2) est au mieux dans $L^1(\Omega \times (0,T))$. Les nombreux travaux sur les équations paraboliques à données L^1 (linéaires ou non linéaires) depuis [7] (voir aussi [5] et [12]) montrent que θ appartient, dans le cas le plus favorable, à $L^p(\Omega \times (0,T))$ avec $p < \frac{N+2}{N}$.

Pour résoudre (1)–(4) (avec un second membre dans L^1) nous sommes donc conduits à supposer que la fonction f vérifie une hypothèse de croissance à l'infini du type :

$$|f(r)| \leq a + M|r|^\alpha \quad \forall r \in \mathbb{R},\ \text{avec } a \geq 0, M \geq 0 \text{ et } \alpha < \frac{N+2}{2N}.$$

En fait, sous cette hypothèses de croissance, les arguments de type point fixe ou approximation ne permettent pas en général de conclure quant à l'existence d'une solution au système (1)–(4) (la difficulté étant d'obtenir une estimation sur θ).

Afin de mieux comprendre la nature du système (1)–(4), nous étudierons une version elliptique modèle :

$$\begin{aligned}
&(5) \qquad && \lambda u - \operatorname{div}(ADu - f(\theta)) = g && \text{dans } \Omega,\\
&(6) \qquad && \mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = (ADu - f(\theta)) \cdot Du && \text{dans } \Omega,\\
&(7) \qquad && u = 0, \qquad \theta = 0 && \text{sur } \partial\Omega,
\end{aligned}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, de frontière $\partial\Omega$, λ, $\mu > 0$, $g \in L^2(\Omega)$, f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$, A est une matrice symétrique à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ uniformément coercive et $v \to -\operatorname{div}(\mathbf{a}(x, Dv)$ est un opérateur strictement monotone qui opère de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Des systèmes elliptiques non linéaires couplés du type (5)–(7), qui présentent des difficultés différentes, ont été étudiés par B. Climent et E. Fernández-Cara [11], T. Gallouët et R. Herbin [18], et R. Lewandowski [21].

Pour le cas du système (5)–(7), nous sommes aussi amenés à considérer l'équation (6) à donnée L^1, pour laquelle les travaux de L. Boccardo et T. Gallouët [7] (voir aussi [1], [8], [26] et [27]) montrent que $\theta \in L^p(\Omega)$ avec $p < \frac{N}{N-2}$ pour $N > 2$ et $p < +\infty$ pour $N = 2$. Conserver le cadre des données L^1 pour le système (5)–(7), nous conduit à supposer que la fonction f vérifie une hypothèse de croissance à l'infini du type :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad |f(r)| \leq a + M|r|^\alpha,$$

avec $a \geq 0$, $M \geq 0$ et $\alpha < \frac{N}{2(N-2)}$ si $N \neq 2$ ou $\alpha < +\infty$ si $N = 2$.

Considérons le problème régularisé $(5)_\varepsilon$–$(6)_\varepsilon$, obtenu en remplaçant dans (5)–(6) la fonction f par $f^\varepsilon = f \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$ pour $\varepsilon > 0$ où $T_{\frac{1}{\varepsilon}}$ désigne la fonction troncature de hauteur $\frac{1}{\varepsilon}$ ($T_{\frac{1}{\varepsilon}}(r) = \min(\frac{1}{\varepsilon}, \max(r, -\frac{1}{\varepsilon}))$). Il est facile de démontrer que $(5)_\varepsilon$–$(6)_\varepsilon$, (7) admet au moins une solution faible $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ avec la régularité $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et $\theta^\varepsilon \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour $q < \frac{N}{N-1}$. La coercivité de A conduit à l'estimation $\left\|Du^\varepsilon\right\|_{(L^2(\Omega))^N} \leq C(1 + \int_\Omega |\theta^\varepsilon|^{2\alpha}\, \mathrm{d}x)$, où C est une constante qui dépend des données du problème. Des techniques similaires à [7] conduisent à l'estimation

$$\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L^p(\Omega)} \leq C' \left(1 + \int_\Omega |\theta^\varepsilon|^{2\alpha}\, \mathrm{d}x\right), \tag{8}$$

pour tout $p < \frac{N}{N-2}$ si $N > 2$ et $p < +\infty$ si $N = 2$, où C' dépend de C et de Ω. Cette technique ne permet d'obtenir une estimation sur θ^ε que dans le cas où $\alpha < \frac{1}{2}$ (cas que l'on traite alors facilement).

Le point commun entre ces deux systèmes est que l'équation vérifiée par θ est *a priori* à données L^1. Pour ces deux équations à données L^1, l'une elliptique et l'autre parabolique, nous utiliserons le cadre des solutions renormalisées. Les résultats d'unicité et de continuité des solutions renormalisées permettent d'utiliser des arguments de type point fixe, et, pour chaque système, la formulation renormalisée de l'équation en θ permet de bénéficier du couplage entre les deux inconnues.

Les solutions renormalisées ont été introduites par R.J. Di Perna et P.-L. Lions pour les équations de Boltzmann et les équations du premier ordre ([14] et [15]). Cette notion a été ensuite adaptée au cas elliptique par L. Boccardo, J.I. Diaz, D. Giachetti et F. Murat [6] pour le problème,

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathrm{div}(\Phi(u)) = F & \text{dans } H^{-1}(\Omega), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, $\Phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ et $F \in H^{-1}(\Omega)$. P.-L. Lions et F. Murat [25] ont étudié (9) dans le cas où $F \in L^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$, ils ont obtenu l'existence et, sous réserve d'hypothèses supplémentaires locales sur Φ, l'unicité de la solution renormalisée.

Pour le cas elliptique qui nous intéresse, et en posant, pour tout $K > 0$, $T_K(r) = \min(K, \max(r, -K))$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, on considère $F \in L^1(\Omega)$, et on appelle solution renormalisée du problème

$$\begin{cases} \mu\theta - \mathrm{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = F \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

l'unique fonction θ définie sur Ω vérifiant les conditions :

$$\theta \in L^1(\Omega), \ \forall K > 0 \ \ T_K(\theta) \in H_0^1(\Omega), \tag{11}$$

pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ telle que h soit à support compact,

$$\mu\theta h(\theta) - \mathrm{div}\big(h(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta)\big) + h'(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta)\cdot D\theta = Fh(\theta) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n<|\theta|<2n\}} |D\theta|^2 \,\mathrm{d}x = 0. \tag{13}$$

P.-L. Lions et F. Murat ont démontré dans [25] l'existence et l'unicité d'une telle solution.

Pour la version parabolique de (10), et pour une formulation renormalisée adaptée au cas d'évolution, D. Blanchard et F. Murat [5] (voir aussi [3] et [24]) ont démontré l'existence et l'unicité de la solution renormalisée ainsi que des propriétés de continuité.

Une autre voie possible pour le système (5)–(7) est d'opérer une transformation formelle analogue à celle utilisée par P.-L. Lions pour les équations de Rayleigh-Bénard dans [24]. En multipliant ponctuellement (5) par u et en additionnant à (6), on obtient un système formellement équivalent,

$$\lambda u - \mathrm{div}(ADu - f(\theta)) = g \qquad \text{dans } \Omega, \tag{14}$$

$$\mu\theta - \mathrm{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) + \lambda u^2 = gu + \mathrm{div}\big[u(ADu - f(\theta))\big] \qquad \text{dans } \Omega, \tag{15}$$

$$u = 0, \qquad \theta = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{16}$$

Dans le cas simple où f est bornée et pour une donnée g dans $L^2(\Omega)$, l'équation (14) nous donne u dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui laisse peu d'espoir d'obtenir $\mathrm{div}(uADu) \in H^{-1}(\Omega)$. Pour l'équation (14), nous utiliserons une formulation du type renormalisé et pour l'équation (15) une formulation du type entropique. La notion de solution entropique pour les équations elliptiques à donnée L^1 a été introduite par Ph. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre et J.L. Vazquez [1] et étendue pour une donnée $L^1 + H^{-1}$ par L. Boccardo, T. Gallouët et L. Orsina [9]. Si $F \in L^1(\Omega)$ et $G \in (L^2(\Omega))^N$, on appelle solution entropique du problème

$$\begin{cases} \mu\theta - \mathrm{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = F + \mathrm{div}G \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{17}$$

l'unique fonction θ mesurable et finie presque partout sur Ω vérifiant les conditions :

$$T_K(\theta) \in H_0^1(\Omega), \forall K > 0, \tag{18}$$

pour tout $K > 0$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \theta T_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta)\cdot DT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \leq \int_\Omega FT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega G\cdot DT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{19}$$

Dans le cas des équations elliptiques à données $L^1(\Omega)+H^{-1}(\Omega)$, solution entropique et solution renormalisée coïncident (voir [28] et [31]).

L'originalité du travail présenté dans le cas du système (14)–(16) consiste à démontrer pour l'équation(15) une inégalité du type entropique alors que $\operatorname{div}(u(ADu-f(\theta)))$ « sort du cadre » $L^1(\Omega)+H^{-1}(\Omega)$. On démontre en particulier que $\int_\Omega u(ADu-f(\theta))\cdot DT_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x$ existe pour tout $K>0$ et tout $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. L'existence d'une telle solution est due fortement au couplage des deux équations (14) et (15).

Cette thèse est composée de trois chapitres.

Dans le chapitre 1, nous étudions le système (5)–(7). Nous démontrons deux résultats d'existence de solutions et un résultat d'unicité. Pour l'équation (6), nous utilisons le cadre des solutions renormalisées.

(i) Si la fonction continue f vérifie une hypothèse de croissance du type :

$$\forall r\in\mathbb{R},\quad |f(r)|\le a+M|r|^\alpha,$$

avec $a\ge 0$, $M\ge 0$ et $\alpha<\frac{N}{2(N-2)}$ si $N\neq 2$ et $\alpha<+\infty$ si $N=2$, le théorème 1.1 nous donne l'existence d'une solution petite de (5)–(7), quand a est petit et g petit dans $L^2(\Omega)$.

(ii) Sans condition sur la donnée g (dans $L^2(\Omega)$) et sous des hypothèses de régularité sur f, le théorème 1.2 donne l'existence d'une solution de (5)–(7).

(iii) Dans le cas de la dimension 2 ou 3, sous des hypothèses de monotonie forte sur l'opérateur $\mathbf{a}$ et de régularité sur f, le théorème 1.5 nous donne l'unicité d'une solution (u,θ) telle que $\theta\ge 0$ p.p. dans Ω et pour une donnée g, dans $L^2(\Omega)$, suffisamment petite.

Le chapitre 2 est consacré au système couplé (14)–(16). La donnée g est dans $L^2(\Omega)$.
Si f vérifie l'une des deux hypothèses suivantes,

$$\text{(H-1)}\qquad \lim_{r\to-\infty}\frac{|f(r)|}{\sqrt{|r|}}=0,$$

$$\text{(H-2)}\qquad \exists r_0\in\mathbb{R}^-,\quad f(r_0)=0,$$

et pour une formulation du type renormalisée pour l'équation (14) et entropique pour l'équation (15), nous démontrons l'existence d'une solution (théorème 2.1), telle que, sous l'hypothèse (H-2), $\theta\ge r_0$ p.p. dans Ω.

La démonstration de ce résultat permet de montrer, sous des hypothèses de régularité supplémentaires sur f, qu'une solution du système (5)–(7) est une solution du système (14)–(16) (dans le sens défini dans ce travail).

Pour une solution (u,θ) de (14)–(16), nous démontrons dans le théorème 2.3 qu'une condition suffisante de régularité sur $f(\theta)$ entraîne que (u,θ) est une solution du système (5)–(7).

Dans le chapitre 3, nous étudions le système non linéaire de la thermoviscoélasticité (1)–(4). Les données u_0, v_0, θ_0 et g sont respectivement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, $(L^2(\Omega))^N$, $L^1(\Omega)$ et $(L^2(Q))^N$. Nous présentons deux résultats d'existence de solutions. Dans les théorèmes 3.1 et 3.2, nous utilisons le cadre des solutions renormalisées pour l'équation (2).

(i) Le théorème 3.1 donne l'existence de solutions petites pour une croissance de f du type

$$\text{(20)}\qquad |f(r)|\le a+M|r|^\alpha\quad\forall r\in\mathbb{R},\ \text{avec } a\ge 0, M\ge 0 \text{ et } \alpha<\frac{N+2}{2N},$$

avec a petit et des données petites.

(ii) Dans le théorème 3.2, nous démontrons un résultat d'existence d'une solution pour des fonctions f qui vérifient (20) pour $r\ge 0$ et, soit $f(r_0)=0$ pour $r_0\le 0$ et $\theta_0\ge r_0$ p.p. sur Ω, soit $|f(r)|\le C(1+|r|)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $r\in\mathbb{R}^-$.

Ce dernier chapitre, en collaboration avec D. Blanchard, a fait l'objet d'une note aux C.R.A.S. [4] et fait partie d'un article en préparation.

Première Partie

CHAPITRE 1

Étude d'un système elliptique couplé

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le système modèle elliptique couplé non linéaire :

$$\text{(S1)} \qquad \begin{cases} \lambda u - \operatorname{div}(ADu - f(\theta)) = g & \text{dans } \Omega, \\ \mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = (ADu - f(\theta)) \cdot Du & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, \qquad \theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, de frontière $\partial\Omega$.

Dans le problème S1,

$$\mathbf{a} : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire telle que $\mathbf{a}(\cdot, \xi)$ soit mesurable sur Ω pour tout ξ dans $\mathbb{R}^N$, et $\mathbf{a}(x, \cdot)$ soit continue sur $\mathbb{R}^N$ pour presque tout x dans Ω.
On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(1.1) $\quad f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$,

(1.2) $\quad g \in L^2(\Omega)$,

(1.3) $\quad \lambda > 0, \quad \mu > 0$,

(1.4) $\quad A(x)$ est une matrice symétrique définie positive à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{cases} \forall i, j \in \{1, \ldots, N\} \ a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \text{ et } a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \text{ p.p. dans } \Omega, \\ \exists \gamma > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2 \text{ p.p. dans } \Omega; \end{cases}$$

(1.5) $\quad \exists \delta > 0, \ \ \mathbf{a}(x, \xi) \cdot \xi \geq \delta|\xi|^2$,

pour presque tout x dans Ω et tout ξ dans $\mathbb{R}^N$;

(1.6) $\quad \exists \beta > 0, \ \ |\,\mathbf{a}(x, \xi)| \leq \beta(b(x) + |\xi|)$,

pour presque tout x dans Ω et tout ξ dans $\mathbb{R}^N$, où b est une fonction de $L^2(\Omega)$;

(1.7) $\quad (\mathbf{a}(x, \xi) - \mathbf{a}(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') > 0$,

pour presque tout x dans Ω et tout ξ, ξ' dans $\mathbb{R}^N$, $\xi \neq \xi'$;

Les inconnues sont les fonctions u et θ définies sur Ω. Le problème (S1) est fortement non linéaire, et dans le membre de droite de la deuxième équation intervient un terme quadratique en Du et $f(\theta)$ qui dépend des inconnues. Prenons le cas simple où f est une fonction bornée, l'analyse de la première équation nous donne Du dans $(L^2(\Omega))^N$, ainsi le membre de droite de la deuxième équation du problème (S1) est au mieux dans $L^1(\Omega)$. Les hypothèses (1.6)–(1.7) étant classiques dans le cadre des opérateurs de type Leray-Lions (voir [20]), les travaux sur les problèmes elliptiques à données L^1 depuis [7] (et aussi [1], [8], [27]) montrent que dans ce cas, θ est au mieux dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-2}[$.

Le terme $(ADu - f(\theta)) \cdot Du$ ne possède, *a priori*, aucune propriété remarquable, et afin de rester dans le cadre des problèmes elliptiques à données dans L^1 cette analyse succincte nous conduit à imposer le fait que $f(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$. Sachant que θ est au mieux dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-2}[$, on est donc conduit à supposer que la fonction f vérifie de plus une hypothèse de croissance à l'infini du type :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad |f(r)| \leq a + M|r|^\alpha, \tag{1.8}$$

avec $a \geq 0$, $M \geq 0$ et $\alpha < \frac{N}{2(N-2)}$ si $N \neq 2$ et $\alpha < +\infty$ si $N = 2$.

En fait, cette seule hypothèse sur f ne permet pas en général, par un argument de type point fixe ou approximation, de conclure quant à l'existence d'une solution au système S1. Nous utiliserons pour l'équation vérifiée par θ, le cadre des solutions renormalisées pour des données L^1 (voir [25], [26] et [27]), ainsi que les propriétés d'unicité et de continuité de ces solutions.

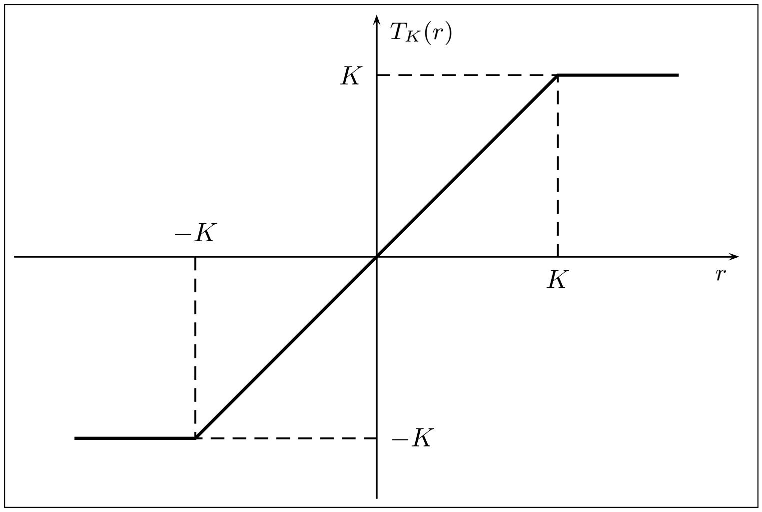
Des résultats d'existence pour des systèmes elliptiques couplés similaires contenant une équation à données L^1 ont été obtenus, d'une part en utilisant le cadre des solutions renormalisées dans [11], [21] et [22], et d'autre part, par point fixe en utilisant le cadre des solutions faibles vérifiant de plus une condition du type entropique (voir [1]) dans [18].

Après un rappel des propriétés des solutions renormalisées, nous démontrerons, par point fixe, un premier résultat d'existence de solution pour le système S1 (théorème 1.1), pour des données petites et une fonction f vérifiant une hypothèse de croissance du type (1.8) avec a petit. Sans hypothèse sur les données et sous des conditions adaptées sur la fonction f, nous obtiendrons ensuite, par approximation et grâce à une estimation utilisant fortement le couplage des deux équations de S1, un deuxième résultat d'existence de solution pour le système S1 (théorème 1.2). Nous donnerons de plus, grâce à une propriété remarquable du système S1, un résultat d'unicité analogue à celui de [11] pour une donnée g suffisamment petite, sous des conditions de monotonie forte pour l'opérateur $\mathbf{a}$ et des hypothèses de régularité sur f.

1.2 Définitions

Pour tout réel positif K, on note T_K la fonction «troncature» à la hauteur K définie par :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad T_K(r) = \min(K, \max(r, -K)).$$



Pour toute partie B de Ω, on note $\mathbb{1}_B$ la fonction caractéristique de l'ensemble B. Pour tout réel r, on note la partie positive $r^+ = \max(0, r)$ et la partie négative $r^- = \max(0, -r)$.

Pour une fonction θ, mesurable dans Ω et finie presque partout, dont les tronquées sont dans $H_0^1(\Omega)$, nous utiliserons la définition suivante pour le gradient de θ (voir [1] et [25]). Notons que ce n'est pas une définition du gradient au sens des distributions.

Définition 1.1
Soit θ une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$ et finie presque partout, telle que, pour tout $K > 0$, on ait $T_K(\theta) \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe un unique champ de vecteur v, mesurable de Ω dans $\mathbb{R}^N$ et fini presque partout, tel que, pour tout $K > 0$,

$$DT_K(\theta) = \mathbb{1}_{\{|\theta|<K\}} v \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Dans la suite nous noterons $D\theta = v$, pour de telles fonctions.

Pour les problèmes elliptiques à données L^1, nous utiliserons le cadre des solutions renormalisées (voir [25], [26] et [27]).

Définition 1.2 (Solution renormalisée)
Pour tout F dans $L^1(\Omega)$, on appelle solution renormalisée du problème

$$P1(F) \begin{cases} \mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = F \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

l'unique fonction θ définie sur Ω vérifiant les conditions :

$$\theta \in L^1(\Omega), \ \forall K > 0 \ \ T_K(\theta) \in H_0^1(\Omega), \tag{1.9}$$

pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ telle que h soit à support compact,

$$\mu\theta h(\theta) - \operatorname{div}\big(h(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta)\big) + h'(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta)\cdot D\theta = Fh(\theta) \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{1.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n<|\theta|<2n\}} |D\theta|^2 \, \mathrm{d}x = 0. \tag{1.11}$$

Remarque 1.1 L'équation (1.10) est obtenue en multipliant formellement l'équation de $P1(F)$ par $h(\theta)$. Remarquons que tous les termes de (1.10) ont un sens dans $\mathcal{D}'(\otimes)$. En effet, soient $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ telle que h soit à support compact et $K > 0$ tel que le support de h soit inclus dans $[-K, K]$, alors on a :

- $\mu\theta h(\theta) \in L^\infty(\Omega)$,
- $h(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta) = h(\theta)\,\mathbf{a}\big(x, DT_K(\theta)\big)$ p.p. dans Ω,
- $h'(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta)\cdot D\theta = h'(\theta)\,\mathbf{a}\big(x, DT_K(\theta)\big)\cdot DT_K(\theta)$ p.p. dans Ω,
- $Fh(\theta) \in L^1(\Omega)$.

Compte tenu des hypothèses (1.6)–(1.7) et de la régularité (1.9) on obtient que $\operatorname{div}(h(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta)) \in H^{-1}(\Omega)$ et $h'(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta)D\theta \in L^1(\Omega)$. Ainsi tous les termes de (1.10) ont un sens dans $L^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$.

L'existence de ces solutions est obtenue par approximation et passage à la limite. Nous donnerons par la suite quelques propriétés de continuité et de régularité des solutions renormalisées, qui seront essentielles pour obtenir les théorèmes d'existence de solution pour le système S1. Cette définition s'étend pour des données F appartenant à $L^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$.

La définition suivante précise la notion de solution pour le système S1 que nous utiliserons dans la suite.

Définition 1.3
Un couple de fonctions définies sur Ω, (u, θ) est appelé solution faible-renormalisée du problème (S1) si :

$$u \in H_0^1(\Omega), \tag{1.12}$$

$$\theta \in L^1(\Omega), \quad \forall K > 0 \ \ T_K(\theta) \in H_0^1(\Omega), \tag{1.13}$$

$$f(\theta) \in (L^2(\Omega))^N, \tag{1.14}$$

$$\lambda u - \operatorname{div}(ADu - f(\theta)) = g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} &\text{pour toute fonction } h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \text{ telle que } h \text{ soit à support compact,} \\ &\mu\theta h(\theta) - \operatorname{div}(h(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta)) + h'(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta)\cdot D\theta \\ &\qquad = h(\theta)(ADu - f(\theta))\cdot Du \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n<|\theta|<2n\}} |D\theta|^2 \,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.17}$$

Remarque 1.2 Dans le cadre de la définition 1.3, les régularités (1.12) et (1.14) entraînent que $(ADu - f(\theta))\cdot Du$ est dans $L^1(\Omega)$. Ainsi sous les hypothèses de régularité (1.13), la formulation (1.16) et (1.17) est celle d'une solution renormalisée au sens de la définition 1.2, pour la deuxième équation de (S1). La première équation de (S1) est vérifiée au sens faible classique des équations aux dérivées partielles.

1.3 Rappels de quelques propriétés des solutions renormalisées

Nous rappelons quelques propriétés des solutions renormalisées (voir [25], [26] et [27]) que nous utiliserons dans la suite pour démontrer les théorèmes d'existence de solution du système S1 au sens de la définition 1.3.

Soient $F \in L^1(\Omega)$ et θ l'unique solution renormalisée du problème $P1(F)$. Alors pour tout $w \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que $\exists K > 0$ vérifiant $Dw = 0$ p.p. dans $\{x \ : \ |\theta(x)| \geq K\}$, on a

$$\mu \int_\Omega \theta w \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta)\cdot Dw \,\mathrm{d}x = \int_\Omega Fw \,\mathrm{d}x. \tag{1.18}$$

Pour F_1, F_2 dans $L^1(\Omega)$, si θ_1 et θ_2 désignent respectivement les solutions renormalisées des problèmes $P1(F_1)$ et $P1(F_2)$, on a, en procédant comme dans [5], pour tout $K \geq 0$,

$$\begin{aligned}(1.19)\quad \mu \int_\Omega (\theta_1 - \theta_2) T_K(\theta_1 - \theta_2)\,\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega \big(\mathbf{a}(x, D\theta_1) - \mathbf{a}(x, D\theta_2)\big) \cdot (D\theta_1 - D\theta_2) \mathbb{1}_{\{|\theta_1 - \theta_2| < K\}}\,\mathrm{d}x \\ \leq \int_\Omega (F_1 - F_2) T_K(\theta_1 - \theta_2)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La monotonie de l'opérateur $\mathbf{a}$ et l'inégalité ci-dessus entraînent donc que

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu} \|F_1 - F_2\|_{L^1(\Omega)},$$

ce qui signifie que l'application de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ qui à F associe l'unique solution renormalisée du problème $P1(F)$ est continue et lipschitzienne de constante de Lipschitz $\frac{1}{\mu}$.

Le lemme suivant concerne les techniques d'estimations de Boccardo-Gallouët [7] et [8] (et aussi [1], [2], [26] et [27]) ; dans ce lemme nous précisons la dépendance par rapport à M de la majoration de $\int_\Omega |D\theta|^q\,\mathrm{d}x$.

Lemme 1.1 *Soient θ une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, finie presque partout, et $p \in]1, N]$, tels que*

$$(1.20)\qquad \forall K > 0, \quad T_K(\theta) \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$(1.21)\qquad \forall K > 0, \quad \int_\Omega |DT_K(\theta)|^p\,\mathrm{d}x \leq KM \quad \textit{avec } M > 0.$$

Alors pour tout $q \in]0, \frac{N}{N-1}(p-1)[$, il existe $C(q, p, N, \Omega) > 0$, une constante indépendante de θ et de M, telle que

$$(1.22)\qquad \int_\Omega |D\theta|^q\,\mathrm{d}x \leq C(q, p, N, \Omega) \times M^{\frac{q}{p-1}}.$$

Remarque 1.3 Dans le cas où $p < 2 - \frac{1}{N}$, on a $\frac{N}{N-1}(p-1) < 1$. Dans l'inégalité (1.22) le gradient considéré, $D\theta$, n'est pas le gradient dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ mais le gradient au sens des tronquées, défini presque partout dans Ω.

Preuve du lemme 1.1.

Soit $q \in]0, \frac{N}{N-1}(p-1)[$ et posons pour tout k dans $\mathbb{N}$, $a_k = 2^k \times M^{\frac{1}{p-1}}$.
Comme θ est finie presque partout on a

$$\begin{aligned}(1.23)\qquad \int_\Omega |D\theta|^q\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\{0 \leq |\theta| < a_0\}} |D\theta|^q\,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{a_k \leq |\theta| < a_{k+1}\}} |D\theta|^q\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega |DT_{a_0}(\theta)|^q\,\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{a_k < |\theta| < a_{k+1}\}} |DT_{a_{k+1}}(\theta)|^q\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Majorons chaque terme de l'inégalité précédente. D'après l'inégalité de Hölder on a

$$\int_\Omega |DT_{a_0}(\theta)|^q\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |DT_{a_0}(\theta)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \left(\mathrm{mes}\{0 < |\theta| < a_0\}\right)^{\frac{p-q}{p}},$$

ce qui nous donne d'après l'hypothèse (1.21) du lemme,

$$\begin{aligned}(1.24)\qquad \int_\Omega |DT_{a_0}(\theta)|^q \,\mathrm{d}x &\le (a_0 M)^{\frac{q}{p}} (\mathrm{mes}\{\Omega\})^{\frac{p-q}{p}} \\ &\le M^{\frac{q}{p-1}} (\mathrm{mes}\{\Omega\})^{\frac{p-q}{p}}.\end{aligned}$$

De la même façon, pour tout k dans $\mathbb{N}$, on obtient que

$$\begin{aligned}(1.25)\qquad \int\limits_{\{a_k<|\theta|<a_{k+1}\}} |DT_{a_{k+1}}(\theta)|^q \,\mathrm{d}x &\le \left(\int_\Omega |DT_{a_{k+1}}(\theta)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \Big(\mathrm{mes}\{a_k < |\theta| < a_{k+1}\}\Big)^{\frac{p-q}{p}} \\ &\le (M a_{k+1})^{\frac{q}{p}} (\mathrm{mes}\{a_k < |\theta| < a_{k+1}\})^{\frac{p-q}{p}}.\end{aligned}$$

Nous allons définir un réel s selon la valeur de p. Dans le cas où $N = p$, soit $s > p$. Dans le cas où $N > p$, posons $s = p^\star$, où $p^\star$ est l'exposant conjugué de Sobolev de p ($\frac{1}{p^\star} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ soit $p^\star = \frac{pN}{N-p}$). Nous ne distinguerons les deux cas qu'à la fin de la démonstration. En effet, d'après le théorème des injections de Sobolev, $W_0^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^s(\Omega)$ et les calculs qui suivent sont valables dans les deux cas. En utilisant le théorème des injections de Sobolev, soit $C_1(s,p,\Omega,N)$ un réel strictement positif ne dépendant que de s, p, Ω et N tel que, pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$\int_\Omega |T_{a_k}(\theta)|^s \,\mathrm{d}x \le C_1(s,p,\Omega,N) \left(\int_\Omega |DT_{a_k}(\theta)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{s}{p}},$$

ce qui nous donne

$$a_k^s \mathrm{mes}\{a_k < |\theta| < a_{k+1}\} \le \int_\Omega |T_{a_k}(\theta)|^s \,\mathrm{d}x \le C_1(s,p,\Omega,N) \left(\int_\Omega |DT_{a_k}(\theta)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{s}{p}},$$

et d'après (1.21),

$$\mathrm{mes}\{a_k < |\theta| < a_{k+1}\} \le C_1(s,p,\Omega,N) \frac{(M a_k)^{\frac{s}{p}}}{a_k^s}.$$

Injectons cette inégalité dans l'inégalité (1.25), il vient

$$(1.26)\qquad \int_{\{a_k<|\theta|<a_{k+1}\}} |DT_{a_{k+1}}(\theta)|^q \,\mathrm{d}x \le a_{k+1}^{\frac{q}{p}} M^{\frac{q}{p}} \left(C_1(s,\Omega,N)\right)^{\frac{p-q}{p}} M^{\frac{s}{p}(\frac{p-q}{p})} a_k^{(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p})}.$$

D'après la définition de a_k, on a

$$a_{k+1}^{\frac{q}{p}} a_k^{(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p})} M^{\frac{q}{p}+\frac{s}{p}(\frac{p-q}{p})} = 2^{\frac{q}{p}}\, 2^{k(\frac{q}{p}+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p}))}\, M^{\frac{q}{p}+\frac{s}{p}(\frac{p-q}{p})+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p})(\frac{1}{p-1})+\frac{q}{p(p-1)}}.$$

Calculons la puissance de M dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}&\frac{q}{p} + \frac{s}{p}\left(\frac{p-q}{p}\right) + \left(\frac{s}{p} - s\right)\left(\frac{p-q}{p}\right)\left(\frac{1}{p-1}\right) + \frac{q}{p(p-1)} \\ &\qquad = \frac{1}{p(p-1)} \left(q(p-1) + \frac{s}{p}(p-1)(p-q) + \left(\frac{s}{p} - s\right)(p-q) + q\right) \\ &\qquad = \frac{1}{p(p-1)} \left(qp + s(p-q) - \frac{s}{p}(p-q) + \left(\frac{s}{p} - s\right)(p-q)\right) \\ &\qquad = \frac{1}{p(p-1)}(qp) = \frac{q}{p-1}.\end{aligned}$$

Des calculs précédents, et des inégalités (1.23), (1.24) et (1.26) on obtient que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |D\theta|^q \,\mathrm{d}x &\le M^{\frac{q}{p-1}}(\mathrm{mes}\{\Omega\})^{\frac{p-q}{q}} + \sum_{k=0}^{+\infty}(C_1(s,p,\Omega,N))^{\frac{p-q}{p}} M^{\frac{q}{p-1}} 2^{\frac{q}{p}} 2^{k(\frac{q}{p}+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p}))} \\ &\le M^{\frac{q}{p-1}}(\mathrm{mes}\{\Omega\})^{\frac{p-q}{q}} + C_1(s,p,\Omega,N))^{\frac{p-q}{p}} M^{\frac{q}{p-1}} 2^{\frac{q}{p}} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(\frac{q}{p}+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p}))}.\end{aligned}$$

La série $\left(2^{k(\frac{q}{p}+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p}))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente ssi $\frac{q}{p}+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p})<0$

ssi $q(1-\frac{s}{p}+s)<0$

ssi $q<ps\dfrac{p-1}{p+s(p-1)}$.

Dans le cas où $N=p$, s peut être choisi arbitrairement dans l'intervalle $[p,+\infty[$. Comme $\lim_{s\to+\infty} ps\dfrac{p-1}{p+s(p-1)}=p$, il existe $s>p$ tel que la série $\left(2^{k(\frac{q}{p}+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p}))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $q<p$.

Dans le cas où $N>p$, on a $s=p^\star=\frac{Np}{N-p}$ et $ps\frac{p-1}{p+s(p-1)}=\frac{N}{N-1}(p-1)$ et la série $\left(2^{k(\frac{q}{p}+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p}))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $q<\frac{N}{N-1}(p-1)$.

En remarquant que dans le cas où $p=N$, on a $\frac{N}{N-1}(p-1)=p$, on obtient que pour $q\in[1,\frac{N}{N-1}(p-1)[$, en choisissant s si nécessaire tel que $\frac{q}{p}+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p})<0$,

$$\int_\Omega |D\theta|^q\,\mathrm{d}x \le C(q,N,\Omega)M^{\frac{q}{p-1}},$$

$$\text{avec}\quad C(q,p,N,\Omega)=\mathrm{mes}\{\Omega\}^{\frac{p-q}{q}}+(C_1(s,p,\Omega,N))^{\frac{p-q}{p}}2^{\frac{q}{p}}\sum_{k=0}^{+\infty}2^{k(\frac{q}{p}+(\frac{s}{p}-s)(\frac{p-q}{p}))}$$

On obtient ainsi l'estimation voulue (1.22). ■

Le lemme 1.1 va nous donner une propriété de régularité sur la solution renormalisée de $P1(F)$. Cette propriété sera déterminante pour obtenir les résultats d'existence de solution du système S1.

Soient $F\in L^1(\Omega)$ et θ l'unique solution renormalisée (définition 1.2) du problème

$$P1(F)\begin{cases}\mu\theta-\mathrm{div}(\mathbf{a}(x,D\theta))=F & \text{dans } \Omega,\\ \theta=0 \quad \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}$$

Montrons que pour tout $q\in[1,\frac{N}{N-1}[$, on a $\theta\in W_0^{1,q}(\Omega)$ et qu'il existe $C>0$, une constante indépendante de F et de θ telle que

$$\|\theta\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}\le C\times\frac{\|F\|_{L1(\Omega)}}{\delta}.$$

Pour tout $K\ge0$, la fonction $T_K(\theta)\in L^\infty(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ et $DT_K(\theta)=0$ p.p. sur $\{|\theta|>K\}$. Donc d'après les propriétés des solutions renormalisées on a, pour tout $K\ge0$,

$$\int_\Omega \theta T_K(\theta)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta)\cdot DT_K(\theta)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega FT_K(\theta)\,\mathrm{d}x.$$

La coercivité de l'opérateur $\mathbf{a}$ entraîne que θ vérifie, pour tout $K>0$,

$$\int_\Omega |DT_K(\theta)|^2\,\mathrm{d}x\le K\frac{\|F\|_{L^1(\Omega)}}{\delta}.$$

On en déduit que θ vérifie les hypothèses du lemme 1.1 dans le cas où $p = 2$. Soit $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$, on déduit du lemme 1.1 qu'il existe $C_1(q, N, \Omega) > 0$, une constante indépendante de F et de θ, telle que

$$\left\|D\theta\right\|_{L^q(\Omega)} \leq C_1(q, N, \Omega) \frac{\|F\|_{L^1(\Omega)}}{\delta},$$

Comme $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$, on en déduit que $D\theta$ coïncide avec le gradient de θ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ainsi $\theta \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Donc pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$, il existe $C_3(q, N, \Omega) > 0$, une constante indépendante de F et θ, telle que

$$\|\theta\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_3(q, N, \Omega) \frac{\|F\|_{L^1(\Omega)}}{\delta}. \tag{1.27}$$

1.4 Existence d'une solution pour des données petites

Théorème 1.1 *On suppose vérifiées les hypothèses (1.1)–(1.7) et que la fonction continue f vérifie de plus*

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad |f(r)| \leq a + M|r|^\alpha,$$

avec $a \geq 0$, $M \geq 0$ et $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{N}{2(N-2)}\right[$ si $N > 2$ et $\alpha \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ si $N = 2$.

Alors il existe $\eta > 0$ (dépendant de $\Omega, a, A, \lambda, \mu, M$) tel que si $\|g\|_{L^2(\Omega)} + a < \eta$, il existe au moins une solution (u, θ) du système S1 au sens de la définition 1.3.

Remarque 1.4 Le théorème 1.1 donne à M fixé des conditions sur a et g suffisantes pour obtenir l'existence d'une petite solution faibe-renormalisée du système S1 au sens de la définition 1.3. L'analyse de la démonstration du théorème 1.1 permet, par point fixe grâce à l'inégalité (1.34), d'établir qu'à g et a fixés, il existe $\eta > 0$ tel que pour $M < \eta$, il existe au moins une solution faible-renormalisée du système S1 au sens de la définition 1.3.

Remarque 1.5 Dans le cas où la croissance de la fonction f est $\alpha = 1/2$, sous des conditions supplémentaires de régularité sur f et dans le cas modèle $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^-$, pour un opérateur $\mathbf{a}$ vérifiant une condition de monotonie forte, nous démontrerons dans le théorème 1.5 l'unicité de la solution de S1 pour une donnée g petite, en dimension N=2 ou N=3.

Preuve du théorème 1.1.

Nous procéderons par point fixe. La démonstration est décomposée en trois étapes. Dans la première étape nous définirons, en fonction du système S1, une application continue et compacte. Dans la deuxième étape, nous donnerons une condition suffisante pour avoir l'existence d'un convexe fermé stable par cette application, ce qui nous permettra d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder dans la troisième étape. L'unicité et la continuité des solutions renormalisées par rapport aux données L^1 sont essentielles pour obtenir ce résultat d'existence pour des données petites.

1$^{\text{ère}}$ étape : définition d'une application R de $L^{2\alpha}(\Omega)$ dans lui-même, continue et compacte.

D'après l'hypothèse supplémentaire vérifiée par f, soient $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \frac{N}{2(N-2)}\right[$, $a \geq 0$ et $M > 0$ tel que

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad |f(r)| \leq a + M|r|^\alpha. \tag{1.28}$$

D'après les propriétés des solutions renormalisées, notons l'application R_1 définie par :

$$\begin{aligned} R_1 \ : \ L^1(\Omega) &\longrightarrow L^{2\alpha}(\Omega) \\ F &\longrightarrow \theta, \end{aligned}$$

où θ est l'unique solution renormalisée du problème $P1(F)$.

Montrons que R_1 est continue de $L^1(\Omega)$ dans $L^{2\alpha}(\Omega)$. Dans le cas où $\alpha = 1/2$, d'après les propriétés des solutions renormalisées, il est clair que R_1 est continue.

Dans le cas où $\alpha > 1/2$, soient $F \in L^1(\Omega)$ et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\Omega)$ convergent fortement dans $L^1(\Omega)$ vers F. Posons $\theta = R_1(F)$ et $\theta_n = R_1(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $q \in]1, \frac{N}{N-1}[$ tel que $q^* > 2\alpha$. Par interpolation entre $L^1(\Omega)$ et $L^{q^*}(\Omega)$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega |\theta - \theta_n|^{2\alpha}\,\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega |\theta - \theta_n|^{q^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q^*-1}{2\alpha-1}} \times \left(\int_\Omega |\theta - \theta_n|\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q^*-1}{q^*-2\alpha}}.$$

Des propriétés des solutions renormalisées, on en déduit que pour tout $n \in N$,

$$\int_\Omega |\theta - \theta_n|^{2\alpha}\,\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega |\theta - \theta_n|^{q^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q^*-1}{2\alpha-1}} \times \left(\frac{1}{\mu}\|F - F_n\|_{L^1(\Omega)}\right)^{\frac{q^*-1}{q^*-2\alpha}}. \tag{1.29}$$

D'après la propriété (1.27) et le théorème d'injection de Sobolev, soit $C_1 > 0$, une constante indépendante de n, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\theta_n\|_{L^{q^*}(\Omega)} \le C_1 \frac{\|F_n\|_{L^1(\Omega)}}{\delta},$$
$$\|\theta\|_{L^{q^*}(\Omega)} \le C_1 \frac{\|F\|_{L^1(\Omega)}}{\delta}.$$

Comme $F_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ dans $L^1(\Omega)$ fort, on obtient facilement que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\int_\Omega |\theta - \theta_n|^{q^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q^*-1}{2\alpha-1}} \right) < +\infty.$$

On déduit alors de (1.29) que $\lim_{n\to+\infty} \|\theta - \theta_n\|_{L^{2\alpha}(\Omega)} = 0$, et que l'application R_1 est continue de $L^1(\Omega)$ dans $L^{2\alpha}(\Omega)$.

Pour tout $\hat\theta \in L^{2\alpha}(\Omega)$, l'hypothèse de croissance (1.28) entraîne que $f(\hat\theta) \in (L^2(\Omega))^N$. De ce fait, on note l'application R_2, définie par :

$$\begin{aligned} R_2 \ :\ & L^{2\alpha}(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega), \\ & \hat\theta \longrightarrow \big(AD\hat u - f(\hat\theta)\big)\cdot D\hat u \quad \text{où } \hat u \text{ est l'unique solution dans } H_0^1(\Omega) \text{ du problème} \end{aligned}$$

$$P2(\hat\theta) \begin{cases} \lambda\hat u - \mathrm{div}(AD\hat u) = g + \mathrm{div} f(\hat\theta) \text{ dans } \Omega, \\ \hat u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La linéarité du problème $P2$ par rapport à $\hat u$, la continuité de f et la condition de croissance (1.28) entraînent que R_2 est une application continue de $L^{2\alpha}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$.

Les applications R_1 et R_2 étant définies et continues, on pose :

$$\begin{aligned} R \ :\ & L^{2\alpha}(\Omega) \longrightarrow L^{2\alpha}(\Omega), \\ & \hat\theta \longrightarrow \theta = R_1 \circ R_2(\hat\theta). \end{aligned}$$

L'application R est bien définie et continue de $L^{2\alpha}(\Omega)$ dans lui-même.

Montrons que R est compacte. Considérons $(\hat\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^{2\alpha}(\Omega)$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a

$$|f(\hat\theta_n)|^2 \le 2(a^2 + M^2|\hat\theta_n|^{2\alpha}) \ \text{ p.p. dans } \Omega,$$
$$\text{d'où } \int_\Omega |f(\hat\theta_n)|^2\,\mathrm{d}x \le 2a^2 \mathrm{mes}\{\Omega\} + 2M^2\|\hat\theta_n\|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}(\Omega)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la définition de R_2, soit $\hat{u}_n \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\big(AD\hat{u}_n - f(\hat{\theta}_n)\big) \cdot D\hat{u}_n = R_2(\hat{\theta}_n)$. En appliquant la fonction test $\hat{u}_n$ à $P2(\hat{\theta})$, on obtient

$$\lambda \int_\Omega \hat{u}_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega AD\hat{u}_n \cdot D\hat{u}_n \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(\hat{\theta}_n) \cdot D\hat{u}_n \,\mathrm{d}x + \int_\Omega g\hat{u}_n \,\mathrm{d}x. \tag{1.30}$$

La coercivité (1.5) de la matrice A entraîne

$$\lambda \int_\Omega \hat{u}_n^2 \,\mathrm{d}x + \gamma \int_\Omega |D\hat{u}_n|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(\hat{\theta}_n) \cdot D\hat{u}_n \,\mathrm{d}x + \int_\Omega g\hat{u}_n \,\mathrm{d}x,$$

et grâce à l'inégalité de Young, on en déduit que

$$\gamma \int_\Omega |D\hat{u}_n|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\gamma} \int_\Omega |f(\hat{\theta}_n)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\lambda} \int_\Omega g^2 \,\mathrm{d}x.$$

D'où l'inégalité :

$$\int_\Omega |D\hat{u}_n|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\gamma^2} \|f(\hat{\theta})\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \frac{1}{2\lambda\gamma} \|g\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.31}$$

La suite $(\hat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^{2\alpha}(\Omega)$, l'hypothèse de croissance (1.28) sur f, entraîne que $(f(\hat{\theta}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^N$. On déduit alors de l'inégalité (1.31) que $R_2(\hat{\theta}_n) = \big(AD\hat{u}_n - f(\hat{\theta}_n)\big)D\hat{u}_n$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. Donc d'après la propriété (1.27), $(R(\hat{\theta}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ et par suite, la condition $2\alpha < q^*$ et le théorème de Rellich entraînent que $(R(\hat{\theta}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est compacte dans $L^{2\alpha}(\Omega)$.
Ainsi R est une application compacte de $L^{2\alpha}(\Omega)$ dans lui-même.

2ème étape : condition suffisante pour l'existence d'une boule de $L^{2\alpha}(\Omega)$ stable par R.

Pour $\hat{\theta}$ dans $L^{2\alpha}(\Omega)$ nous allons majorer $\|R(\hat{\theta})\|_{L^{2\alpha}(\Omega)}$ par une fonction de $\|\hat{\theta}\|_{L^{2\alpha}(\Omega)}$.
Soient $\theta = R(\hat{\theta})$ et (d'après la définition de R_2) $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\big(AD\hat{u} - f(\hat{\theta})\big) \cdot D\hat{u} = R_2(\hat{\theta})$.
Grâce à l'égalité (1.30) dans laquelle $\hat{u}$ et $\hat{\theta}$ remplacent respectivement $\hat{u}_n$ et $\hat{\theta}_n$, on obtient

$$\int_\Omega AD\hat{u} \cdot D\hat{u} \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\|f(\hat{\theta})\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \frac{1}{2}\|D\hat{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \frac{1}{2\lambda}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

L'inégalité (1.31) dans laquelle $\hat{u}$ et $\hat{\theta}$ remplacent respectivement $\hat{u}_n$ et $\hat{\theta}_n$ et l'inégalité précédente entraînent que

$$\int_\Omega AD\hat{u} \cdot D\hat{u} \,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\gamma^2}\right) \|f(\hat{\theta})\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \left(\frac{1}{4\lambda\gamma} + \frac{1}{2\lambda}\right) \|g\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|R_2(\hat{\theta})\|_{L^1(\Omega)} &= \|(AD\hat{u} - f(\hat{\theta})) \cdot D\hat{u}\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|AD\hat{u} \cdot D\hat{u}\|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|f(\hat{\theta})\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \frac{1}{2}\|D\hat{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \|f(\hat{\theta})\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \frac{1}{2\lambda}\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \|g\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Comme $2\alpha < \frac{N}{N-2}$, soit $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$ tel que $W_0^{1,q}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^{2\alpha}(\Omega)$. D'après (1.27), soit $C > 0$, une constante indépendante de $\hat{\theta}$ telle que

$$\|\theta\|_{L^{2\alpha}(\Omega)} \leq C \times \frac{\|R_2(\hat{\theta})\|_{L^1(\Omega)}}{\delta}.$$

On déduit alors de (1.32) que

$$\|\theta\|_{L^{2\alpha}(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta}\left(\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)\|f(\hat{\theta})\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \frac{1}{2\lambda}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Plus généralement, il existe C_1 et C_2, deux constantes strictement positives dépendantes de α, γ, λ, δ, Ω et N telle que $\theta = R(\hat{\theta})$ vérifie

$$\forall\hat{\theta} \in L^{2\alpha}(\Omega) \quad \|R(\hat{\theta})\|_{L^{2\alpha}(\Omega)} \leq C_1\left(\|f(\hat{\theta})\|^2_{(L^2(\Omega)^N)} + C_2\|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{1.33}$$

L'hypothèse de croissance sur f entraîne que

$$\forall\hat{\theta} \in L^{2\alpha}(\Omega) \quad \|R(\hat{\theta})\|_{L^{2\alpha}(\Omega)} \leq C_1\left(2a^2\text{mes}\{\Omega\} + 2M^2\|\hat{\theta}\|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}(\Omega)} + C_2\|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{1.34}$$

La propriété (1.34) permet de trouver des conditions suffisantes sur les données afin d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder. Nous cherchons $r > 0$ tel que $R(\overline{B}_{L^{2\alpha}(\Omega)}(0,r)) \subset \overline{B}_{L^{2\alpha}(\Omega)}(0,r)$, donc d'après (1.34) une condition suffisante est que $\exists r > 0$ tel que

$$C_1(2a^2\text{mes}\{\Omega\} + 2M^2r^{2\alpha} + C_2\|g\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq r. \tag{1.35}$$

Comme $2\alpha > 1$, il apparaît clairement que sans condition supplémentaire sur les données g, a et M, l'ensemble des $r > 0$ vérifiant l'inégalité (1.35) peut être vide (il suffit de prendre a suffisamment grand par rapport à M).

Soit $r > 0$ tel que $2C_1M^2r^{2\alpha} < r$. On a donc $r < \sqrt[2\alpha-1]{\frac{1}{2C_1M^2}}$. Alors pour tous $a > 0$ et $g \in L^2(\Omega)$ tels que $C_1(2a^2\text{mes}\{\Omega\} + C_2\|g\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq r - 2C_1M^2r^{2\alpha}$, r vérifie (1.35).

Donc, soit $\eta > 0$ tel que si $a + \|g\|_{L^2(\Omega)} < \eta$, il existe alors $r > 0$ vérifiant (1.35).

3ème étape : Application du théorème du point fixe de Schauder.

Supposons que $a + \|g\|_{L^2(\Omega)} < \eta$. D'après ce qui précède, soit $r > 0$ tel que $R(\overline{B}_{L^{2\alpha}(\Omega)}(0,r)) \subset \overline{B}_{L^{2\alpha}(\Omega)}(0,r)$. L'application R est continue compacte de $L^{2\alpha}(\Omega)$ dans $L^{2\alpha}(\Omega)$. D'après le théorème du point fixe de Schauder, R admet au moins un point fixe, θ. D'après la définition de l'application R, soit $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que $R_2(\theta) = (ADu - f(\theta)) \cdot Du$. θ étant un point fixe de R, on a $\theta = R_1((ADu - f(\theta)) \cdot Du)$. Des définitions de R_2 et R_1, on en déduit que le couple (u, θ) vérifie :

$$\begin{cases} \lambda u - \text{div}(ADu) = g + \text{div}f(\theta) \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \theta \text{ est l'unique solution renormalisée du problème} \\ \begin{cases} \mu\theta - \text{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = (ADu - f(\theta)) \cdot Du \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \end{cases}$$

La régularité sur θ et la croissance de f entraînent que $f(\theta) \in L^2(\Omega)$.

Pour tout $a \geq 0$ et tout $g \in L^2(\Omega)$ tels que $a + \|g\|_{L^2(\Omega)} < \eta$, il existe au moins une petite solution (u, θ) du système S1 au sens de la définition 1.3. ∎

Remarque 1.6 Dans le cas où la fonction continue f est bornée, l'analyse de la démonstration du théorème 1.1 permet de définir une application continue R de $L^1(\Omega)$ dans une partie bornée de $L^1(\Omega)$ (inégalité (1.33)). L'application R étant compacte de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, on obtient, sous les hypothèses (1.1)–(1.7), que si, de plus, la fonction continue f est bornée, il existe au moins une solution (u, θ) faible renormalisée du système S1 au sens de la définition 1.3.

1.5 Existence d'une solution pour des données quelconques

Dans la démonstration du théorème 1.1, nous avons considéré deux applications continues et cherché des conditions suffisantes pour pouvoir appliquer un théorème de point fixe. Dans le théorème 1.2, nous allons différencier les comportements de f sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$. Nous n'allons plus faire l'hypothèse de données petites mais nous allons supposer que

• $|f(r)| \leq a + M|r|^\alpha$ pour tout r dans $\mathbb{R}^+$, avec $a \geq 0$, $M \geq 0$ et $\alpha < \frac{N+2}{2N}$, ce qui est plus restrictif que (1.8) (hypothèse du théorème 1.1), puisque $\frac{N+2}{2N} < \frac{N}{2(N-2)}$

• une hypothèse sur le comportement de f sur $\mathbb{R}^-$, dont le modèle est $f \equiv 0$ si $r < r_0 < 0$.

Pour démontrer ce résultat nous allons procéder par approximation et passage à la limite, de ce fait les estimations faites sur le problème approché de S1 bénéficieront du couplage entre u et θ.

Théorème 1.2 *On suppose vérifiées les hypothèses (1.1)–(1.7) et que la fonction continue f vérifie $|f(r)| \leq a + M|r|^\alpha$ pour tout r dans $\mathbb{R}^+$, avec $a \geq 0$, $M \geq 0$ et $\alpha < \frac{N+2}{2N}$. On suppose de plus que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(H-1) $\displaystyle \lim_{r \to -\infty} \frac{|f(r)|}{\sqrt{|r|}} = 0,$

(H-2) $\exists r_0 \in \mathbb{R}^-$ *tel que* $f(r_0) = 0$.

Alors il existe au moins une solution faible-renormalisée (u, θ) du système S1 au sens de la définition 1.3, telle que, sous l'hypothèse (H-2), $\theta \geq r_0$ p.p. dans Ω.

Avant de démontrer le théorème 1.2, nous allons énoncer et démontrer le lemme suivant, qui résulte de l'inégalité de Hölder.

Lemme 1.2 *Soient $v \in L^p(\Omega)$ $(p > 1)$, $C' > 0$ et $C'' > 0$ tels que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C' \left(1 + \int_\Omega |v|^\beta \,\mathrm{d}x\right) \qquad \text{avec } 0 < \beta \text{ et } \quad \|v\|_{L^1(\Omega)} \leq C''.$$

Alors si $\beta < 2 - \dfrac{1}{p}$, il existe $C > 0$, dépendant uniquement de β, p, C' et C'', tel que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C.$$

Preuve du lemme 1.2.

Si $\beta \leq 1$, le résultat, par l'inégalité de Hölder, est évident.

Remarquons que, comme pour tout $p \leq 1$, $2 - \frac{1}{p} \leq p$, on a toujours $\beta < p$. Dans le cas où $\beta > 1$, on procède par interpolation ; d'après les hypothèses du lemme 1.2 et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^p(\Omega)} &\leq C' \left(1 + \int_\Omega |v|^\beta \,\mathrm{d}x\right) \\ &\leq C' \left(1 + \left(\int_\Omega |v|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\beta-1}{p-1}} \left(\int_\Omega |v| \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-\beta}{p-1}}\right).\end{aligned}$$

Si $\beta < 2 - \frac{1}{p}$, on a $\dfrac{\beta - 1}{p-1} < \dfrac{1 - \frac{1}{p}}{p-1} = \dfrac{1}{p}$. On peut donc appliquer l'inégalité de Young et obtenir que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C' + \frac{(\beta-1)p}{p-1} \|v\|_{L^p(\Omega)} + \left(1 - \frac{(\beta-1)p}{p-1}\right) \left(C'(C'')^{\frac{p-\beta}{p-1}}\right)^{1 - \frac{(\beta-1)p}{p-1}}.$$

Comme $\frac{(\beta-1)p}{p-1} < 1$, on obtient l'estimation désirée. ■

Remarque 1.7 Dans le lemme 1.2, dans le cas limite où $\beta = 2 - \frac{1}{p}$, on n'obtient pas, généralement, de résultat similaire. En effet, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, posons $v_n = n^2 \mathbb{1}_{]\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}[}$. Pour tout n, on a $\|v_n\|_{L^1(]0,1[)} \leq 1$ et de plus un calcul nous donne $\|v_n\|_{L^p(]0,1[)} \sim n^{2(1-\frac{1}{p})}$ au voisinage de $+\infty$. De la même façon, on a $\displaystyle\int_{]0,1[} |v_n|^\beta \,\mathrm{d}x = \int_{]0,1[} |v_n|^{2-\frac{1}{p}} \,\mathrm{d}x \sim n^{2(1-\frac{1}{p})}$ au voisinage de $+\infty$. Mais clairement pour $p > 1$, $\|v_n\|_{L^p(]0,1[)}$ n'est pas bornée uniformément en n.

Preuve du théorème 1.2.

1ère partie : Nous démontrons d'abord le résultat sous la condition (H-1).
Soient $\alpha \in [0, \frac{N+2}{2N}[$, $M \geq 0$ et $a \geq 0$ tels que

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \quad |f(r)| \leq a + M|r|^\alpha. \tag{1.36}$$

Posons pour tout $\varepsilon > 0$, $f^\varepsilon = f \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$. En adaptant la démonstration du théorème 1.1 au cas d'une fonction continue bornée, on obtient l'existence de $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$, une solution faible-renormalisée du système S1, au sens de la définition 1.3, dans lequel f^ε remplace f.

1ère Estimation a priori :

La fonction $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie l'équation

$$\lambda u^\varepsilon - \operatorname{div}(ADu^\varepsilon - f(\theta^\varepsilon)) = g \qquad \text{dans} \;\; \mathcal{D}'(\otimes).$$

Appliquons à l'équation précédente la fonction test u^ε. On obtient

$$\lambda \int_\Omega (u^\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g u^\varepsilon \,\mathrm{d}x. \tag{1.37}$$

D'après les propriétés des solutions renormalisées on a, pour tout $K \geq 0$,

$$\mu \int_\Omega \theta^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon) \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon) \cdot DT_K(\theta^\varepsilon) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon) \,\mathrm{d}x. \tag{1.38}$$

Pour $K \geq 0$, la somme de (1.38) et de (1.37) multiplié par K nous donne

$$\begin{aligned} \lambda K \int_\Omega (u^\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}x + \mu \int_\Omega \theta^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon) \,\mathrm{d}x + K \int_\Omega (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon \,\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon) \cdot DT_K(\theta^\varepsilon) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon) \,\mathrm{d}x + K \int_\Omega g u^\varepsilon \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

et après regroupement,

$$\begin{aligned} \lambda K \int_\Omega (u^\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}x + \mu \int_\Omega \theta^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon) \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon) \cdot DT_K(\theta^\varepsilon) \,\mathrm{d}x \\ \int_\Omega (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon (K - T_K(\theta^\varepsilon)) \,\mathrm{d}x = K \int_\Omega g u^\varepsilon \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.39}$$

D'après les propriétés (1.4) de la matrice A, l'inverse de la matrice A, notée A^{-1}, est symétrique, coercive et à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$. De plus on a pour tout ξ dans $\mathbb{R}^N$, $A^{-1}(x)\xi \cdot \xi \leq \frac{1}{\gamma}|\xi|^2$ p.p. dans Ω. Une transformation du terme $(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon (T_K(\theta^\varepsilon) - K)$ nous donne

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon (K - T_K(\theta^\varepsilon)) \,\mathrm{d}x \\ &\quad = \int_\Omega A \left(Du^\varepsilon - \tfrac{1}{2} A^{-1} f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right) \cdot \left(Du^\varepsilon - \tfrac{1}{2} A^{-1} f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right) (K - T_K(\theta^\varepsilon)) \,\mathrm{d}x \\ &\qquad - \frac{1}{4} \int_\Omega A^{-1} f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \cdot f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) (K - T_K(\theta^\varepsilon)) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Cette transformation appliquée à (1.39) conduit à

$$\begin{aligned}(1.40)\quad \lambda K\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega \theta^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot DT_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x\\
+\int_\Omega A\left(Du^\varepsilon - \tfrac12 A^{-1}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right)\cdot\left(Du^\varepsilon - \tfrac12 A^{-1}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right)(K-T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x\\
=\frac14\int_\Omega A^{-1}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)(K-T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x + K\int_\Omega g u^\varepsilon\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La fonction $K - T_K(\theta^\varepsilon)$ étant positive presque partout sur Ω, des propriétés de l'opérateur $\mathbf{a}$ et de la matrice A, on en déduit que tous les termes du membre de gauche de (1.40) sont positifs. On a donc l'inégalité suivante pour tout $K \geq 0$,

$$\begin{aligned}\lambda K\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega \theta^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x\\
\leq \frac14\int_\Omega A^{-1}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)(K-T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x + K\int_\Omega g u^\varepsilon\,\mathrm{d}x\\
\leq \frac{1}{4\gamma}\int_\Omega |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2(K-T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x + \frac{K}{2\lambda}\int_\Omega g^2\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}K\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Fixons $K = 1$, on obtient alors que

$$(1.41)\qquad \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega \theta^\varepsilon T_1(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4\gamma}\int_\Omega |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2(1-T_1(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4\lambda}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'après la condition (H-1), vérifiée par la fonction f, soit $r_1 \in]-\infty,-1]$ tel que

$$\forall r \leq r_1 \quad |f(r)|^2 \leq \mu\gamma|r|.$$

Cette dernière propriété, le fait que $1 - T_1(r) = 0$ pour $r \geq 1$ et l'inégalité (1.41) entraînent donc, pour $\varepsilon < \frac{1}{|r_1|}$,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega \theta^\varepsilon T_1(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{4\gamma}\int_\Omega |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2(1-T_1(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\lambda}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \frac{1}{4\gamma}\int_{\{\theta^\varepsilon\leq r_1\}} 2|f(T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\theta^\varepsilon))|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\gamma}\mathrm{mes}\{\Omega\}\sup_{r_1\leq r\leq 1}|f(r)|^2 + C_1\\
&\leq \frac{\mu}{2}\int_{\{\theta^\varepsilon\leq r_1\}} |\theta^\varepsilon|\,\mathrm{d}x + C_2,\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de ε.
L'inégalité ci-dessus entraîne alors que

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x + \mu\int_{\{\theta^\varepsilon>r_1\}} \theta^\varepsilon T_1(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \frac{\mu}{2}\int_{\{\theta^\varepsilon\leq r_1\}} |\theta^\varepsilon|\,\mathrm{d}x \leq C_2.$$

On a donc obtenu l'estimation suivante,

$$(1.42)\qquad \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq C_3 \quad \text{où } C_3 \text{ est une constante indépendante de } \varepsilon.$$

L'estimation ci-dessus sur θ^ε va permettre, par rapport au théorème 1.1, de s'affranchir de l'hypothèse des petites données. Cette estimation est obtenue grâce à un comportement de f sur $\mathbb{R}^-$ plus restrictif.

Remarque 1.8 Sous la seule condition (H-1) sur la fonction continue f (sans hypothèse de croissance à l'infini du type (1.8)) l'estimation (1.42) subsiste et entraîne que si $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est solution du problème approché S1, dans lequel f^ε remplace f, alors u^ε et θ^ε sont bornées respectivement dans $L^2(\Omega)$ et $L^1(\Omega)$ uniformément en ε. La coercivité de l'opérateur $\mathbf{a}$ et l'égalité (1.40) entraîne de plus que, pour tout $K > 0$, $T_K(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$ indépendamment de ε.

$2^{\text{ème}}$ Estimation a priori et extraction d'une sous suite :

La linéarité de l'équation vérifiée par u^ε entraîne que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left\|Du^\varepsilon\right\|_{(L^2(\Omega))^N} \leq C_4 \left(\left\|f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right\|_{(L^2(\Omega))^N} + \left\|g\right\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

où C_4 est une constante indépendante de ε.
D'après la propriété (1.27) des solutions renormalisées, pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$, on a

$$\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_5(q, N, \Omega) \frac{\left\|(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon\right\|_{L^1(\Omega)}}{\delta},$$

où $C_5(q, N, \Omega)$ est une constante indépendante de ε.
Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient que pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$,

$$\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_6(q, N, \Omega) \left(\left\|f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \left\|g\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right), \tag{1.43}$$

où $C_6(q, N, \Omega)$ est une constante indépendante de ε.
En décomposant f^ε sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, on a

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2 &\leq 1\!\!1_{\{\theta^\varepsilon < r_1\}} |f(\theta^\varepsilon)|^2 + \sup_{r \in [r_1, 0]} |f(r)|^2 + 1\!\!1_{\{\theta^\varepsilon > 0\}} |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2 \\ &\leq \mu\gamma|\theta^\varepsilon| + \sup_{r \in [r_1, 0]} |f(r)|^2 + 2a^2 + 2M^2|\theta^\varepsilon|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Comme $2\alpha < \frac{N+2}{N} < \frac{N}{N-2}$, d'après les propriétés des solutions renormalisées et le théorème d'injection de Sobolev, il est clair que $\int_\Omega |\theta^\varepsilon|^{2\alpha}\, dx$ est finie. L'inégalité précédente, l'estimation (1.42) sur θ^ε dans $L^1(\Omega)$ et (1.43) impliquent alors que pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$,

$$\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_7(q, N, \Omega) \left(1 + \int_\Omega |\theta^\varepsilon|^{2\alpha}\, dx \right), \tag{1.44}$$

où $C_7(q, N, \Omega)$ est une constante indépendante de ε.

Distinguons alors 2 cas possibles :

1^{er} cas : $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.
L'estimation (1.42) et l'inégalité (1.44) entraînent que θ^ε est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < \frac{N}{N-1}$. Le théorème de Rellich entraîne que θ^ε est compact dans $L^1(\Omega)$. Soit $\theta \in L^1(\Omega)$ tel que, à une sous suite près, θ^ε converge vers θ fortement dans $L^1(\Omega)$ et p.p. quand $\varepsilon \to 0$. La continuité et la croissance de f impliquent que $f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge fortement dans $(L^2(\Omega))^N$ vers $f(\theta)$ quand $\varepsilon \to 0$.

$2^{\text{ème}}$ cas : $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{N+2}{2N}$.
L'inégalité (1.44) et le théorème d'injection de Sobolev entraînent que pour tout $p \in [1, \frac{N}{N-2}[$, il existe $C_8(p, N, \Omega) > 0$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \|\theta^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C_8(p, N, \Omega) \left(1 + \int_\Omega |\theta^\varepsilon|^{2\alpha}\, dx \right). \tag{1.45}$$

La fonction qui à p associe $2 - \frac{1}{p}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme pour tout $p \in [1, \frac{N}{N-2}[$, on a $2 - \frac{1}{p} < 2 - \frac{N-2}{N} = \frac{N+2}{N}$, il existe $p \in [1, \frac{N}{N-2}[$ tel que $2\alpha < 2 - \frac{1}{p}$ si $\alpha < \dfrac{N+2}{2N}$.

Soit $p \in [1, \frac{N}{N-2}[$ tel que $2\alpha < 2 - \frac{1}{p}$. D'après (1.45) et (1.42), pour tout $\varepsilon > 0$, θ^ε vérifie les hypothèses du lemme 1.2, on en déduit qu'il existe $C_8 > 0$, une constante indépendante de ε, telle que

$$\|\theta^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C_8 \quad \text{indépendamment de } \varepsilon.$$

Passage à la limite :

Comme $2\alpha < p$, θ^ε est bornée indépendamment de ε dans $L^{2\alpha}(\Omega)$. Donc l'inégalité (1.44) entraîne que pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$, θ^ε est bornée indépendamment de ε dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. Le théorème de Rellich implique alors que, à une sous suite près, θ^ε converge fortement vers θ dans $L^p(\Omega)$ et p.p. dans Ω quand $\varepsilon \to 0$. La continuité de f entraîne que $f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge p.p. dans Ω vers $f(\theta)$ quand $\varepsilon \to 0$. La croissance de f implique que $f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega)$. Le fait que $2\alpha < p$ implique par équi-continuité que $f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge fortement vers $f(\theta)$ dans $L^2(\Omega)$.

Dans les deux cas, nous avons montré que, à une sous suite près,

$$\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \theta \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort et p.p.}$$
$$f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(\theta) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p.}$$

La linéarité de l'équation vérifiée par u^ε, par rapport à u^ε, entraîne que u^ε converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)$ et que u vérifie :

$$\lambda u - \operatorname{div}(ADu - f(\theta)) = g \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\otimes),$$

et que

$$(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} (ADu - f(\theta)) \cdot Du \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

La continuité des solutions renormalisées par rapport aux données L^1 entraîne que θ est solution renormalisée (au sens de la définition 1.2) du problème

$$\begin{cases} \mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = (ADu - f(\theta)) \cdot Du & \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sous la condition (H-1) on a donc montré que (u, θ) est solution du système S1 au sens de la définition 1.3.

2ème partie : Il nous reste à montrer le résultat pour f vérifiant la condition (H-2).

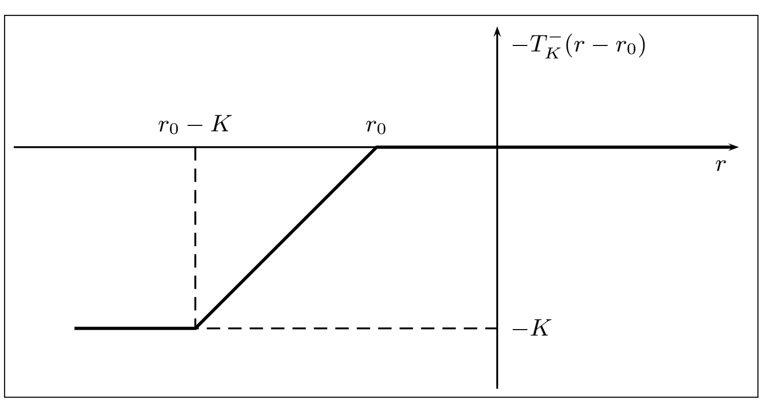
Définissons la fonction continue $\widetilde{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$ par :

$$\widetilde{f}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \le r_0, \\ f(r) & \text{si } r > r_0. \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ vérifie la condition (H-1) et il existe donc une solution faible-renormalisée (u, θ) du système S1, dans lequel $\widetilde{f}$ remplace f, au sens de la définition 1.3. En particulier θ est solution renormalisée du problème

$$\begin{cases} \mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = (ADu - \widetilde{f}(\theta)) \cdot Du & \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrons que $\theta \ge r_0$. Comme $r_0 \le 0$, pour $K \ge 0$, on a $-T_K^-(\theta - r_0) \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $-DT_K^-(\theta - r_0) = \mathbb{1}_{\{-K+r_0<\theta<r_0\}} D\theta$ p.p. dans Ω.



D'après la propriété (1.18) des solutions renormalisées, on obtient que pour tout $K \geq 0$,

$$(1.46) \quad -\mu \int_\Omega \theta T_K^-(\theta - r_0)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta) \cdot DT_K^-(\theta - r_0)\,\mathrm{d}x \\ = -\int_\Omega (ADu - \widetilde{f}(\theta)) \cdot Du\, T_K^-(\theta - r_0)\,\mathrm{d}x.$$

D'après la définition de la fonction $\widetilde{f}$, on a $\widetilde{f}(r)T_K^-(r - r_0) = 0$, pour tout $r \in \mathbb{R}$. On obtient donc d'une part, puisque $A \geq 0$, que

$$(1.47) \quad -\int_\Omega (ADu - \widetilde{f}(\theta)) \cdot Du\, T_K^-(\theta - r_0)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega ADu \cdot Du\, T_K^-(\theta - r_0)\,\mathrm{d}x \leq 0,$$

et d'autre part, que pour tout $K \geq 0$,

$$(1.48) \quad -\mu \int_\Omega \theta T_K^-(\theta - r_0)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta) \cdot DT_K^-(\theta - r_0)\,\mathrm{d}x \\ = \mu \int_\Omega |\theta| T_K^-(\theta - r_0) + \int_{\{-K + r_0 < \theta < r_0\}} \mathbf{a}(x, D\theta) \cdot D\theta\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

L'égalité (1.46) et les inégalités (1.47) et (1.48) entraînent que pour tout $K \geq 0$,

$$\int_\Omega |\theta| T_K^-(\theta - r_0) = 0,$$

ce qui implique $\theta \geq r_0$ p.p. dans Ω. D'après la définition de la fonction $\widetilde{f}$, on obtient que $\widetilde{f}(\theta) = f(\theta)$ p.p. dans Ω et ainsi, (u, θ) est solution faible-renormalisée du système S1 pour la fonction f au sens de la définition 1.3, et de plus $\theta \geq r_0$ p.p. dans Ω, ce qui termine la démonstration. ■

1.6 Quelques résultats concernant l'unicité

L'égalité (1.40) est essentielle de la démonstration du théorème 1.2, cette égalité peut être qualifiée d'énergie du système. Nous allons de nouveau utiliser cette égalité, afin de démontrer une propriété remarquable des solutions faible-renormalisées (u, θ) du système S1, au sens de la définition 1.3 : pour des fonctions continues f nulles en 0, si $\theta \geq 0$ p.p. dans Ω, la quantité $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta\|_{L^1(\Omega)}$ est majorée indépendamment de f par $C \times \|g\|^2_{L^2(\Omega)}$, avec $C > 0$. Cette propriété donnera un premier résultat d'unicité, dans le cas où $f(0) = 0$ et $g \equiv 0$: la solution (u, θ) du système S1, au sens de la définition 1.3, telle que $\theta \geq 0$ est unique, c'est la solution triviale $(0, 0)$.

Proposition 1.3 *On suppose vérifiées les hypothèses (1.1)–(1.7) et que la fonction continue f s'annule en 0. Il existe $C(\lambda, \mu) > 0$ tel que si (u, θ) est une solution faible-renormalisée du système S1, au sens de la définition 1.3, vérifiant $\theta \geq 0$ p.p. dans Ω, alors on a*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta\|_{L^1(\Omega)} \leq C(\lambda, \mu)\|g\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration.
Soit (u, θ) une solution faible-renormalisée du système S1 au sens de la définition 1.3 telle que $\theta \geq 0$ p.p. dans Ω. On procède comme dans la démonstration de l'égalité (1.40) et l'on obtient que pour tout $K \geq 0$,

$$\lambda K \int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x + \mu \int_\Omega \theta T_K(\theta)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta) \cdot DT_K(\theta)\,\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega A\left(Du - \tfrac{1}{2}A^{-1}f(\theta)\right) \cdot \left(Du - \tfrac{1}{2}A^{-1}f(\theta)\right)(K - T_K(\theta))\,\mathrm{d}x \\ = \frac{1}{4}\int_\Omega A^{-1}f(\theta) \cdot f(\theta)(K - T_K(\theta))\,\mathrm{d}x + K\int_\Omega gu\,\mathrm{d}x.$$

La positivité de tous les termes du membre de gauche de l'égalité ci-dessus entraîne l'inégalité suivante, pour tout $K > 0$,

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega \theta\frac{T_K(\theta)}{K}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\int_\Omega A^{-1}f(\theta)\cdot f(\theta)\frac{(K - T_K(\theta))}{K}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\lambda}\int_\Omega g^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.49}$$

Faisons tendre K vers 0 dans (1.49). La fonction θ appartenant à $L^1(\Omega)$, on obtient par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{K\to 0}\int_\Omega \theta\frac{T_K(\theta)}{K}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\theta|\,\mathrm{d}x.$$

De plus $\dfrac{(K - T_K(\theta))}{K} \xrightarrow{K\to 0} 2\mathbb{1}_{\{\theta\le 0\}}$ p.p. dans Ω.
D'après la définition 1.3, $f(\theta) \in L^2(\Omega)$. La matrice A^{-1} étant à coefficients $L^\infty(\Omega)$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne que

$$\lim_{K\to 0}\int_\Omega A^{-1}f(\theta)\cdot f(\theta)\frac{(K - T_K(\theta))}{K}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega A^{-1}f(\theta)\cdot f(\theta)2\mathbb{1}_{\{\theta\le 0\}}\,\mathrm{d}x.$$

Nous avons supposé que $\theta \ge 0$ p.p. dans Ω et $f(0) = 0$. Donc $A^{-1}f(\theta)\cdot f(\theta)2\mathbb{1}_{\{\theta\le 0\}} = 0$ p.p. dans Ω.

L'inégalité (1.49) et les résultats de convergence entraînent que

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega |\theta|\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2\lambda}g^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.50}$$

La proposition est démontrée. ■

Cette proposition permet d'obtenir immédiatement le théorème suivant :

Théorème 1.4 *On suppose vérifiées les hypothèses (1.1)–(1.7), que la fonction continue f s'annule en 0 et $g \equiv 0$. Alors l'unique solution faible-renormalisée (u, θ) au système S1 au sens de la définition 1.3, telle que $\theta \ge 0$ p.p. dans Ω, est la solution triviale (0,0).*

Preuve du théorème 1.4.
On utilise la proposition 1.3. ■

Dans le cas général, la question de l'unicité paraît délicate car le terme $(ADu - f(\theta))Du$ ne possède pas, *a priori*, de propriété de monotonie par rapport à θ. Dans le cas de la dimension 2 ou 3, sous des hypothèses de monotonie forte de l'opérateur $\mathbf{a}$ et de régularité sur f, le théorème suivant établit un résultat d'unicité pour une donnée g dans $L^2(\Omega)$ suffisamment petite.

Théorème 1.5 *On suppose vérifiées les hypothèses (1.1)–(1.7). On suppose de plus que*

(1.51) $N = 2$ *ou* $N = 3$;

(1.52) $(\mathbf{a}(x,\xi) - \mathbf{a}(x,\xi'))\cdot(\xi - \xi') \ge \delta|\xi - \xi'|^2$,
pour presque tout x dans Ω et tout ξ, ξ' dans $\mathbb{R}^N$;

(1.53) $\displaystyle\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{|f(r)|}{\sqrt{r}} < +\infty$;

(1.54) $|f(r) - f(r')| \le L|r - r'|, \quad \forall r, r' \in \mathbb{R}^+$ *avec* $L > 0$;

(1.55) $f(0) = 0$.

Alors il existe $\eta > 0$ tel que si $\|g\|_{L^2(\Omega)} < \eta$, la solution (u, θ) au système S1 au sens de la définition 1.3, vérifiant $\theta \ge 0$ p.p. dans Ω, est unique.

Preuve du théorème 1.5.

Les hypothèses (1.53) et (1.55) et le théorème 1.2 assurent l'existence d'une solution faible-renormalisée (u,θ) du système S1 au sens de la définition 1.3 vérifiant la condition $\theta \geq 0$ p.p. dans Ω.

Considérons 2 solutions faibles-renormalisées (u_1,θ_1) et (u_2,θ_2) du système S1 au sens de la définition 1.3 telles que $\theta_1 \geq 0$ et $\theta_2 \geq 0$ p.p. dans Ω. Pour $i=1,2$, la proposition 1.3 entraîne l'inégalité

$$\|u_i\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta_i\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1\|g\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{1.56}$$

où C_1 est une constante dépendant uniquement de λ et μ.
Pour $i=1,2$, l'équation (1.15) vérifiée par u_i et la coercivité de A conduisent à l'inégalité suivante,

$$\gamma\int_\Omega |Du_i|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(\theta_i)\cdot Du_i\,\mathrm{d}x + \int_\Omega gu_i\,\mathrm{d}x.$$

Grâce à (1.56) et après transformation on en déduit que

$$\int_\Omega |Du_i|^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\gamma^2}\int_\Omega (f(\theta_i))^2\,\mathrm{d}x + \frac{2\sqrt{C_1}}{\gamma}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.57}$$

D'après les hypothèses, $\overline{\lim_{r\to+\infty}}\dfrac{|f(r)|}{\sqrt{r}} < +\infty$ et f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$ avec $f(0)=0$. Il existe donc $M>0$ tel que $|f(r)| \leq M\sqrt{r}$, $\forall r\in\mathbb{R}^+$. On obtient donc de (1.57),

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Du_i|^2\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{\gamma^2}\int_\Omega M^2|\theta_i|\,\mathrm{d}x + \frac{2\sqrt{C_1}}{\gamma}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{C_1M^2}{\gamma^2}+\frac{2\sqrt{C_1}}{\gamma}\right)\|g\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C_2\|g\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{1.58}$$

où C_2 est une constante indépendante de θ_i et u_i et g.

En faisant la différence des équations vérifiées (1.15) par u_1 et u_2, on obtient :

$$\lambda(u_1-u_2) - \mathrm{div}AD(u_1-u_2) = -\mathrm{div}(f(\theta_1)-f(\theta_2)) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\otimes).$$

Appliquons la fonction test $u_1-u_2\in H^1_0(\Omega)$ à l'équation précédente :

$$\lambda\int_\Omega (u_1-u_2)^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega AD(u_1-u_2)\cdot D(u_1-u_2)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (f(\theta_1)-f(\theta_2))\cdot D(u_1-u_2)\,\mathrm{d}x.$$

Ce qui nous donne, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la coercivité de la matrice A,

$$\|D(u_1-u_2)\|_{(L^2(\Omega))^N} \leq \frac{1}{\gamma}\|f(\theta_1)-f(\theta_2)\|_{(L^2(\Omega))^N}.$$

D'après les estimations de Boccardo et Gallouët (voir [7]), θ_i, avec $i=1,2$, appartient à $L^p(\Omega)$ pour tout $p<\frac{N}{N-2}$. D'après les hypothèses supplémentaires du théorème, $N=2$ ou $N=3$, ce qui implique que, pour $i=1,2$, $\theta_i\in L^2(\Omega)$. La fonction f étant lipschitzienne de rapport L, on obtient alors l'inégalité suivante,

$$\|D(u_1-u_2)\|_{(L^2(\Omega))^N} \leq \frac{L}{\gamma}\|\theta_1-\theta_2\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.59}$$

Pour $i=1,2$, θ_i est solution renormalisée du problème

$$\begin{cases}\mu\theta_i - \mathrm{div}(\mathbf{a}(x,D\theta_i)) = (ADu_i - f(\theta_i))\cdot Du_i & \text{dans } \Omega,\\ \theta_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}$$

Posons $F_i = (ADu_i - f(\theta_i)) \cdot Du_i$. D'après la propriété (1.19) des solutions renormalisées, on a pour tout $K \geq 0$,

$$\mu \int_\Omega (\theta_1 - \theta_2) T_K(\theta_1 - \theta_2)\,\mathrm{d}x + \int_{\{|\theta_1-\theta_2|<K\}} \big(\mathbf{a}(x, D\theta_1) - \mathbf{a}(x, D\theta_2)\big) \cdot (D\theta_1 - D\theta_2) \leq \int_\Omega (F_1 - F_2) T_K(\theta_1 - \theta_2)\,\mathrm{d}x.$$

La propriété (1.52) de monotonie forte de l'opérateur $\mathbf{a}$, entraîne que pour tout $K \geq 0$, $T_K(\theta_1 - \theta_2) \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |DT_K(\theta_1 - \theta_2)|^2 \leq \frac{K}{\delta} \|F_1 - F_2\|_{L^1(\Omega)}.$$

Le lemme 1.1 appliqué à $\theta_1 - \theta_2$, implique que pour tout $q \in [1, \frac{N}{N-1}[$

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C(q, N, \Omega) \frac{1}{\delta} \|F_1 - F_2\|_{L^1(\Omega)},$$

où $C(q, N, \Omega)$ est une constante ne dépendant que de q, N et Ω. Comme $N \leq 3$, par les inégalités de Sobolev on en déduit que

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \frac{1}{\delta} \|F_1 - F_2\|_{L^1(\Omega)}, \tag{1.60}$$

où C_3 est une constante ne dépendant que de N et Ω.

Écrivons le terme $F_1 - F_2$ sous la forme :

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 &= (ADu_1 - f(\theta_1)) \cdot Du_1 - (ADu_2 - f(\theta_2)) \cdot Du_2 \\ &= A(Du_1 - Du_2) \cdot (Du_1 + Du_2) + (f(\theta_2) - f(\theta_1)) \cdot Du_1 \\ &\quad + f(\theta_2) \cdot (Du_2 - Du_1). \end{aligned}$$

La matrice A étant à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \|F_1 - F_2\|_{L^1(\Omega)} \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} &\times \|Du_1 - Du_2\|_{(L^2(\Omega))^N} \times \|Du_1 + Du_2\|_{(L^2(\Omega))^N} \\ &+ \|f(\theta_2) - f(\theta_1)\|_{(L^2(\Omega))^N} \times \|Du_1\|_{(L^2(\Omega))^N} \\ &+ \|f(\theta_2)\|_{(L^2(\Omega))^N} \times \|Du_1 - Du_2\|_{(L^2(\Omega))^N}. \end{aligned}$$

Les inégalités (1.59) et (1.58), l'hypothèse de croissance à l'infini sur f et la propriété (1.54) entraînent que

$$\begin{aligned} \|F_1 - F_2\|_{L^1(\Omega)} \leq 2\|A\|_{L^\infty(\Omega)} &\frac{L}{\gamma} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)} \times \sqrt{C_2} \|g\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ L\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)} \times \sqrt{C_2} \|g\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ M\sqrt{\|\theta_2\|_{L^1(\Omega)}} \times \frac{L}{\gamma} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

De l'inégalité (1.56), on en déduit qu'il existe $C_4 > 0$ une constante indépendante de (u_i, θ_i), avec $i = 1, 2$, telle que

$$\|F_1 - F_2\|_{L^1(\Omega)} \leq C_4 \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'inégalité ci dessus et (1.60) impliquent que

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \frac{1}{\delta} C_4 \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.61}$$

Posons $\mu = \delta \times \dfrac{1}{C(N, \Omega) C_3}$. Si $\|g\|_{L^2(\Omega)} < \mu$, l'inégalité (1.61) implique que $\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$, d'où $\theta_1 = \theta_2$ p.p. dans Ω. On en déduit alors facilement que $u_1 = u_2$ p.p. dans Ω, et le théorème est démontré. ■

CHAPITRE 2

Étude d'un système formellement équivalent

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le système elliptique S1. Afin de se placer dans le cadre des solutions renormalisées des équations elliptiques avec un second membre dans L^1, nous avons imposé des conditions de croissance sur la fonction continue f, ce qui nous a permis d'établir deux théorèmes d'existence. Rappelons S1 :

$$\lambda u - \operatorname{div}(ADu - f(\theta)) = g \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.1}$$

$$\mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = (ADu - f(\theta)) \cdot Du \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.2}$$

$$u = 0, \qquad \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{2.3}$$

Les conditions de croissance sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ imposées à f dans le théorème 1.2, ont permis, grâce à une estimation sur le système approché, d'obtenir $(ADu - f(\theta)) \cdot Du \in L^1(\Omega)$. Si on impose seulement une condition de croissance à f sur $\mathbb{R}^-$, du type (H-1), malgré les estimations et résultats de convergence que l'on peut obtenir sur le problème approché (voir remarque 1.8), il manque un élément déterminant pour montrer la convergence forte des tronquées de θ^ε dans $H_0^1(\Omega)$, et l'existence d'une solution renormalisée de (2.2). Cet obstacle est directement lié au caractère non borné du second membre de (2.2) dans $L^1(\Omega)$.

Afin de pallier ces difficultés, effectuons sur S1 quelques transformations formelles, analogues à celles faites dans [24] pour les équations de Rayleigh-Bénard. En multipliant (2.1) par u on a

$$\lambda u^2 - \operatorname{div}\big[u(ADu - f(\theta))\big] + (ADu - f(\theta)) \cdot Du = gu \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.4}$$

Additionnons (2.2) et (2.4), il vient :

$$\mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) + \lambda u^2 = gu + \operatorname{div}\big[u(ADu - f(\theta))\big] \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.5}$$

Cette équation peut s'écrire (au moins formellement) sous la forme suivante,

$$\mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) + \lambda u^2 = -\frac{1}{2}\operatorname{div}(AD(u^2)) - \operatorname{div}(uf(\theta)) + gu \quad \text{dans } \Omega.$$

Elle représente dans le cas elliptique une équation de l'énergie du système S1 (voir [24]).

On obtient ainsi le système suivant, S2, formellement équivalent au système S1 :

$$\text{(S2)} \qquad \begin{cases} \lambda u - \operatorname{div}(ADu - f(\theta)) = g & \text{dans } \Omega, \\ \mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) + \lambda u^2 = gu + \operatorname{div}\big[u(ADu - f(\theta))\big] & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, \qquad \theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Afin d'illustrer la difficulté du système S2, prenons le cas où la fonction f est nulle, u est alors indépendant de θ et pour $g \in L^2(\Omega)$, on obtient alors que $u \in H_0^1(\Omega)$. Dans ce cas, on ne peut espérer obtenir $\operatorname{div}(uADu) \in H^{-1}(\Omega)$, ce qui rend le traitement de l'équation vérifiée par θ délicat.

Dans ce chapitre, nous supposerons, outre les hypothèses (1.1)–(1.7), que la fonction continue f vérifie l'une des deux hypothèses suivantes :

$$\lim_{r \to -\infty} \frac{|f(r)|}{\sqrt{|r|}} = 0, \tag{2.6}$$

$$\exists r_0 \in \mathbb{R}^- \quad \text{tel que} \quad f(r_0) = 0, \tag{2.7}$$

mais aucune condition de croissance sur $\mathbb{R}^+$.

Sous l'une des deux hypothèses (2.6) ou (2.7), nous démontrerons, pour le système S2, l'existence d'une solution (u, θ) avec une formulation du type renormalisée en θ pour l'équation en u et entropique pour l'équation en θ (voir définition 2.2). La transformation formelle, qui permet d'aboutir au système S2, remplace, d'une certaine façon, le terme $(ADu - f(\theta)) \cdot Du$, *a priori* incontrôlable dans $L^1(\Omega)$, par le terme $-\lambda u^2 + gu + \operatorname{div}\big[u(ADu - f(\theta))\big]$ qui possède un caractère semi-continu inférieur par rapport à la classe des fonctions test des solutions entropiques. Bien que le terme $\operatorname{div}\big[u(ADu - f(\theta))\big]$ « sorte du cadre » $L^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$, on démontre, grâce à la structure du système, que $\int_\Omega u(ADu - f(\theta)) \cdot DT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x$ existe pour tout $K > 0$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Sans hypothèse supplémentaire de régularité sur f, comme le terme $-\operatorname{div}(f(\theta))$ ne peut être défini au sens des distributions, nous utiliserons pour l'équation en u une formulation du type renormalisée en θ (obtenue formellement par la multiplication de l'équation en u par $h(\theta)$ avec $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact), adaptée au cas du système S2 (voir définition 2.2), différente de la définition 1.2.

La démonstration du théorème d'existence d'une solution pour le système S2 nous permettra aussi de mieux comprendre la structure du système S1. En particulier, sous des hypothèses de régularité sur f, nous obtiendrons qu'une solution faible-renormalisée de S1, au sens de la définition 1.3, est une solution de S2 au sens de la définition 2.2.

Dans la définition 1.3 de solution du système S1, nous avons « imposé » $f(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$, ce qui entraîne $(ADu - f(\theta)) \cdot Du \in L^1(\Omega)$ et l'utilisation du cadre des solutions renormalisées à données L^1. Dans le cas du système S2, sous la seule hypothèse 2.6 ou 2.7, il y a peu d'espoir d'obtenir $f(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$. Le théorème 2.3 établit que pour une solution (u, θ) de S2, au sens de la définition 2.2, $f(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$ est une condition suffisante pour que (u, θ) soit solution faible-renormalisée de S1 au sens de la définition 1.3.

2.2 Définitions et rappels

Dans ce chapitre, nous utiliserons la notion de solution entropique pour des problèmes elliptiques (voir [1]).

Définition 2.1 (Solution entropique)
Pour tout F dans $L^1(\Omega)$, on appelle solution entropique du problème $P1(F)$:

$$P1(F) \begin{cases} \mu\theta - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = F \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

l'unique fonction θ définie sur Ω vérifiant les conditions suivantes :

$$\theta \in L^1(\Omega), \ \forall K > 0 \ \ T_K(\theta) \in H_0^1(\Omega), \tag{2.8}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et tout $K > 0$,

$$\mu \int_\Omega \theta T_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta) \cdot DT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega F T_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

L'existence de ces solutions est obtenue par approximation et passage à la limite. L'inégalité dans la formulation (2.9) est une inégalité du type entropique pour les problèmes elliptiques et suffit pour obtenir l'existence et l'unicité d'une telle solution. Cette notion de solution entropique s'étend pour des données dans $L^1(\Omega)+H^{-1}(\Omega)$ (voir [9]). De plus dans le cas où $F\in L^1(\Omega)+H^{-1}(\Omega)$, on démontre (voir [28] et [31]) que solution entropique au sens de la définition 2.1 et solution renormalisée au sens de la définition 1.2 coïncident.

Remarque 2.1 Dans l'inégalité (2.9), tous les termes sont bien définis. En effet, soient $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $K>0$. On a alors :

- $\theta T_K(\theta-\varphi)\in L^1(\Omega)$ d'après la régularité (2.8),
- $FT_K(\theta-\varphi)\in L^1(\Omega)$,
- $\mathbf{a}(x,D\theta)\cdot DT_K(\theta-\varphi)=\mathbf{a}(x,D\theta)\cdot(D\theta-D\varphi)\mathbb{1}_{\{|\theta-\varphi|<K\}}\mathbb{1}_{\{|\theta|<K+\|\varphi\|_\infty\}}$ p.p. dans Ω.

Ainsi la régularité (2.8) et la propriété (1.6) de l'opérateur $\mathbf{a}$ entraînent que $\mathbf{a}(x,D\theta)\cdot DT_K(\theta-\varphi)\in L^1(\Omega)$.

Dans le chapitre 1, nous avons rappelé la définition du «gradient au sens des tronquées» (voir [1]). Pour l'étude et la définition d'une solution pour le système S2 (définition 2.2), nous utilisons de nouveau cette notion. Par une construction analogue et sous des conditions de régularité particulières sur un couple de fonctions (u,θ), le lemme suivant définit un gradient (au sens presque partout) pour u en utilisant, comme définition de $D\theta$, la définition 2.2 (le gradient au sens des tronquées).

Lemme 2.1 *Soient $\theta\in L^1(\Omega)$, $u\in L^2(\Omega)$ tels que pour tout $K>0$, $T_K(\theta)\in H_0^1(\Omega)$, $uDT_K(\theta)\in(L^2(\Omega))^N$ et pour toute fonction $h\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et à support compact, $h(\theta)u\in H_0^1(\Omega)$. Il existe alors un unique champ de vecteur mesurable et fini presque partout sur Ω, $v\;:\;\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^N$ tel que*

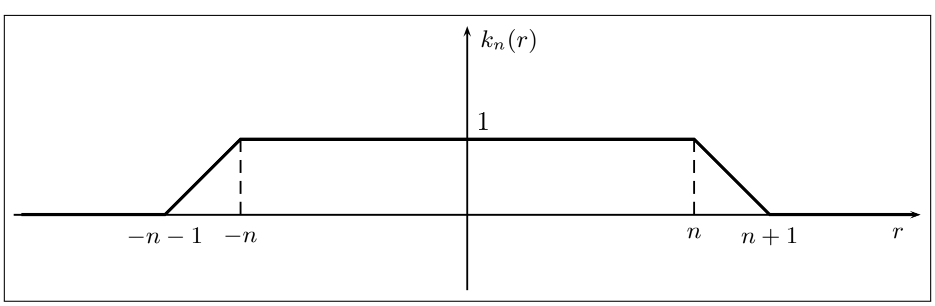
$$\begin{gathered}\forall h\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})\ \text{à support compact},\\ D\big[uh(\theta)\big]=h'(\theta)uD\theta+h(\theta)v\quad\text{p.p. dans }\Omega,\\ h(\theta)v\in(L^2(\Omega))^N.\end{gathered}$$

Dans la suite et pour un tel couple (u,θ) nous noterons $v=Du$.

Preuve du lemme 2.1.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $\Omega_n=\{x\,;\,|\theta(x)|<n\}$.
Comme θ est fini presque partout, on a $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\Omega_n=\Omega$ à un ensemble de mesure nulle près. De plus, pour tout $K>0$, $T_K(\theta)\in H_0^1(\theta)$, ce qui permet d'obtenir $D\theta$, le gradient au sens des tronquées défini p.p. au sens de la définition 1.1.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note la fonction k_n définie par

$$k_n(r)=\begin{cases}0 & \text{si } r\le -n-1,\\ n+r & \text{si } -n-1<r\le -n,\\ 1 & \text{si } -n<r\le n,\\ n-r & \text{si } n<r\le n+1,\\ 0 & \text{si } n+1<r.\end{cases}$$



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction v_n de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v_n \ : \ \Omega_n &\longrightarrow \mathbb{R}^N, \\ x &\longrightarrow D\big(k_n(\theta)u\big)(x). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse, $k_n(\theta)u \in H_0^1(\Omega)$, donc v_n est bien défini de Ω_n dans $\mathbb{R}^N$, mesurable et fini presque partout dans Ω_n.

Montrons que pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$ alors $v_{m|\Omega_n} = v_n$ p.p. dans Ω_n.
Soit $K > 0$, d'après les hypothèses la fonction $k_n(\theta)T_K(k_m(\theta)u) \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et on a : $D\big[k_n(\theta)T_K(k_m(\theta)u)\big] = k_n(\theta)DT_K(k_m(\theta)u) + T_K(k_m(\theta)u)k_n'(\theta)D\theta$ p.p. dans Ω.

Comme $uk_n'(\theta)D\theta \in (L^2(\Omega))^N$, et $k_m(\theta)u \in H_0^1(\Omega)$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne que

$$\begin{aligned} T_K(k_m(\theta)u)k_n'(\theta)D\theta &\xrightarrow{K\to+\infty} k_m(\theta)uh'(\theta)D\theta \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort}, \\ k_n(\theta)DT_K(k_m(\theta)u) &\xrightarrow{K\to+\infty} k_n(\theta)D(k_m(\theta)u) \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort}. \end{aligned}$$

On en déduit que $D\big[k_n(\theta)T_K(k_m(\theta)u)\big] \xrightarrow{K\to+\infty} k_n(\theta)D\big(k_m(\theta)u\big)+k_m(\theta)uh'(\theta)D\theta$ dans $(L^2(\Omega))^N$ fort.
De plus $k_n(\theta)T_K(k_m(\theta)u) \xrightarrow{K\to+\infty} k_n(\theta)k_m(\theta)u$ dans $L^2(\Omega)$ fort et p.p. dans Ω.
On en déduit alors l'identité :

$$D\big[k_n(\theta)k_m(\theta)u\big] = k_n(\theta)D\big(uk_m(\theta)\big) + k_m(\theta)uk_n'(\theta)D\theta \quad \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Puisque $m > n$, la définition des fonctions k_n entraîne que

$$D\big(k_n(\theta)u\big) = k_n(\theta)D\big(uk_m(\theta)\big) + k_m(\theta)uk_n'(\theta)D\theta \ \text{ p.p. dans } \Omega.$$

De plus $k_n'(\theta) = 1\!\!1_{\{n<|\theta|<n+1\}} = 0$ p.p. sur Ω_n, et $\Omega_n \subset \Omega_m$. On obtient donc que $v_n = v_{m|\Omega_n}$ p.p. dans Ω_n.

La propriété précédente permet de définir v :

$$\begin{aligned} v \ : \ \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^N, \\ x &\longrightarrow v_n(x) \text{ pour } n \text{ tel que } x \in \Omega_n. \end{aligned}$$

Le vecteur v est bien défini, mesurable et fini presque partout sur Ω.

Soit $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact et montrons la propriété concernant $D(uh(\theta))$ et v. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{supp} h \subset [-n+1, n-1]$ et considérons, pour tout $K > 0$, $h(\theta)T_K(uk_n(\theta))$. D'après les propriétés sur u et θ, $h(\theta)T_K(uk_n(\theta)) \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $D\big[h(\theta)T_K(uk_n(\theta))\big] = h(\theta)DT_K(uk_n(\theta)) + T_K(uk_n(\theta))h'(\theta)D\theta$ p.p. dans Ω. De la même façon que précédemment, en faisant tendre K vers $+\infty$, on obtient l'identité

$$D\big[h(\theta)k_n(\theta)u\big] = h(\theta)D\big(uk_n(\theta)\big) + h'(\theta)uk_n(\theta)D\theta \quad \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.10}$$

Or nous avons choisi n, tel que $\operatorname{supp} h \subset [-n+1, n-1]$, donc $\{x\,;\, h(\theta(x)) \neq 0\} \subset \Omega_n$, et $h' \times k_n = h'$.

Ainsi, d'après la définition de v, on obtient finalement que $D(h(\theta)u) = h(\theta)v + h'(\theta)uD\theta$. L'existence du vecteur v est démontré.

Si v vérifie, pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact, $D\big[h(\theta)u\big] = h(\theta)v+h'(\theta)uD\theta$, on obtient alors en utilisant les fonctions k_n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{|\Omega_n} = v_n \quad \text{p.p. dans } \Omega_n.$$

On en déduit donc l'unicité du champ de vecteur v.

La propriété vérifiée par $D(uh(\theta))$ et v implique clairement que $h(\theta)v \in (L^2(\Omega))^N$. ■

Remarque 2.2 Sous les hypothèses du lemme 2.1, soient $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact et $K > 0$, alors $h(\theta)T_K(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D(h(\theta)T_K(u)) = T_K(u)h'(\theta)D\theta + h(\theta)\mathbb{1}_{\{|u|<K\}}Du$ p.p. dans Ω. En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{supp} h \subset [-n+1, n-1]$, on a alors $h(\theta)T_K(u) = h(\theta)T_K(uk_n(\theta))$ p.p. dans Ω. Comme $h(\theta)$ et $uk_n(\theta)$ appartiennent à $L^\infty \cap H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} D\big[h(\theta)T_K(u)\big] &= D\big[h(\theta)T_K\big(uk_n(\theta)\big)\big] \\ &= T_K\big(uk_n(\theta)\big)h'(\theta)D\theta + h(\theta)\mathbb{1}_{\{|uk_n(\theta)|<K\}} \times \big(k_n(\theta)Du + uk_n'(\theta)D\theta\big) \\ &= T_K(u)h'(\theta)D\theta + h(\theta)\mathbb{1}_{\{|u|<K\}}Du \quad \text{ p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

De la même façon, on a $h(\theta)DT_K(u) = h(\theta)\mathbb{1}_{\{|u|<K\}}Du$ p.p dans Ω.

Il est à noter que la définition de Du donnée par le lemme 2.1 n'est pas une définition au sens des distributions, tout comme celle de $D\theta$ donnée par la définition 1.1.

Définition 2.2
Un couple de fonctions définies sur Ω, (u, θ) est dit solution renormalisée-entropique du problème S2 si :

$$u \in L^2(\Omega),\ \theta \in L^1(\Omega); \tag{2.11}$$

$$\forall K > 0,\ T_K(\theta) \in H_0^1(\Omega),\ uDT_K(\theta) \in (L^2(\Omega))^N; \tag{2.12}$$

pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ telle que h soit à support compact,

$$h(\theta)u \in H_0^1(\Omega) \text{ et}, \tag{2.13}$$

$$\forall K > 0,\ Du\mathbb{1}_{\{\theta<K\}} \in (L^2(\Omega))^N,\ uDu\mathbb{1}_{\{\theta<K\}} \in (L^2(\Omega))^N\ ; \tag{2.14}$$

$$\theta^- \in H_0^1(\Omega),\ \theta^- u^2 \in L^1(\Omega); \tag{2.15}$$

pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ telle que h soit à support compact,

$$\begin{aligned} \lambda uh(\theta) - \operatorname{div}\big(h(\theta)ADu\big) + h'(\theta)ADu \cdot D\theta& \\ + \operatorname{div}\big(h(\theta)f(\theta)\big) - h'(\theta)f(\theta) \cdot D\theta = gh(\theta) &\quad \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega); \end{aligned} \tag{2.16}$$

et si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et tout $K > 0$,

$$\begin{aligned} \mu \int_\Omega \theta T_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta) \cdot DT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega u^2 T_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x& \\ \leq \int_\Omega guT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u\big(ADu - f(\theta)\big) \cdot DT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x.& \end{aligned} \tag{2.17}$$

Remarque 2.3 (sur la définition 2.2) Les régularités (2.11) (2.12) et (2.13) de la définition précédente permettent, grâce au lemme 2.1, de définir Du presque partout dans Ω. L'équation (2.16) est obtenue formellement en multipliant l'équation (2.1) par $h(\theta)$. Pour $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact et $K > 0$ tels que $\operatorname{supp} h \subset [-K, K]$, examinons les termes de l'égalité (2.16) :

- d'après les régularités (2.11) $uh(\theta) \in L^2(\Omega)$;
- d'après les régularités (2.11), (2.14), (2.13) et le lemme 2.1 on a $h(\theta)Du \in (L^2(\Omega))^N$, d'où $\operatorname{div}\big(h(\theta)Du\big) \in H^{-1}(\Omega)$;
- $h'(\theta)D\theta \cdot Du = h'(\theta)DT_K(\theta) \cdot Du$ p.p. dans Ω. D'après (2.12) et (2.14), on a $DT_K(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$ et $h'(\theta)Du = h'(\theta)h_K(\theta)Du \in (L^2(\Omega))^N$ d'après le lemme 2.1. On en déduit donc que $h'(\theta)D\theta \cdot Du \in L^1(\Omega)$;
- $h(\theta)f(\theta) \in (L^\infty(\Omega))^N$;
- $h'(\theta)f(\theta) \cdot D\theta = h'(\theta)f(\theta) \cdot DT_K(\theta)$ p.p. dans Ω, donc $h'(\theta)f(\theta) \cdot D\theta \in L^2(\Omega)$;
- $gh(\theta) \in L^2(\Omega)$.

Ainsi tous les termes de (2.16) sont définis dans $L^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$.

L'inégalité (2.17) est du type entropique. Comme dans la définition 2.1 (solution entropique), les deux premiers termes du membre de gauche de (2.17) sont bien définis. Pour les autres termes, soient $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $K > 0$ et $K' > K + \|\varphi\|_\infty$, on a :

- $u^2 T_K(\theta - \varphi) \in L^1(\Omega)$;

- $guT_K(\theta-\varphi) \in L^1(\Omega)$;
- $u\big(ADu - f(\theta)\big) \cdot DT_K(\theta-\varphi) = (ADu - f(\theta)) \cdot (D\theta - D\varphi)\, u 1\!\!1_{\{|\theta-\varphi|<K\}}\, 1\!\!1_{\{|\theta|<K'\}}$
$$= ADu \cdot DT_{K'}(\theta)\, u\, 1\!\!1_{\{|\theta-\varphi|<K\}}\, 1\!\!1_{\{|\theta|<K'\}} - ADu \cdot D\varphi\, u\, 1\!\!1_{\{|\theta-\varphi|<K\}}\, 1\!\!1_{\{|\theta|<K'\}} - u\, f(\theta) \cdot DT_K(T_{K'}(\theta) - \varphi) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Les régularités (2.11)–(2.14) et (2.13), le lemme 2.1 et les propriétés de la matrice A, entraînent que : $1\!\!1_{\{|\theta|<K'\}} ADu \in (L^2(\Omega))^N$,
$uDT_{K'}(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$,
$DT_K\big(T_{K'}(\theta) - \varphi\big) \in (L^2(\Omega))^N$.

On en déduit que $u\big(ADu - f(\theta)\big) \cdot DT_K(\theta-\varphi) \in L^1(\Omega)$.

Finalement tous les termes de l'inégalité (2.17) sont définis.

Remarque 2.4 Les régularités (2.15) concernant θ^- et $\theta^- u^2$ permettent de démontrer (voir démonstration du théorème 2.3) que pour une solution renormalisée-entropique du système S2 on a un équivalent de l'égalité (1.40) vérifiée par une solution faible-renormalisée du système S1. Comme dans la définition 2.2, le point (2.17) est une inégalité et non une égalité, cet équivalent est, de ce fait, une inégalité. La formulation renormalisée-entropique du système S2 conserve, d'une certaine façon, la structure du système initial S1 et on démontre dans le théorème 2.3 qu'une condition de régularité sur $f(\theta)$, où (u, θ) est solution renormalisée-entropique de S2 au sens de la définition 2.2, entraîne que (u, θ) est solution faible renormalisée du système S1 au sens de la définition 1.3.

2.3 Existence d'une solution pour le système S2

En imposant à f une hypothèse sur son comportement sur $\mathbb{R}^-$, i.e. (2.6) ou (2.7), et sans aucune condition de croissance sur $\mathbb{R}^+$, on a le théorème d'existence suivant pour le système S2.

Théorème 2.1 *On suppose vérifiées les hypothèses (1.1)–(1.7) et que la fonction continue f vérifie (2.6) ou (2.7). Alors il existe au moins une solution renormalisée-entropique (u, θ) du système S2 au sens de la définition 2.2, telle que, sous l'hypothèse (2.7), $\theta \geq r_0$ p.p. dans Ω.*

Remarque 2.5 L'hypothèse (2.6) ou (2.7) sur le comportement de f conditionne les régularités $\theta^- \in H_0^1(\Omega)$ et $\theta^- u^2 \in L^1(\Omega)$ (voir définition 2.2).

Nous démontrerons ce théorème par approximation et passage à la limite. Nous commencerons par le cas où f vérifie (2.6). La démonstration du théorème est décomposée en 5 étapes.

Dans la suite nous supposerons que la fonction continue f vérifie l'hypothèse (2.6). Pour tout $\varepsilon > 0$, notons $f^\varepsilon = f \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$. La fonction continue f^ε est bornée, donc d'après le théorème 1.2, il existe au moins $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$, une solution (faible-renormalisée) du système S1ε (le système S1 dans lequel f^ε remplace f) au sens de la définition 1.3 :

$$(\mathrm{S1}\varepsilon) \qquad \begin{cases} \lambda u^\varepsilon - \operatorname{div}(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) = g & \text{dans } \Omega, \\ \mu\theta^\varepsilon - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)) = (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot Du^\varepsilon & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0, \qquad \theta^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1ère étape : Estimations a priori.

1ères estimations

Nous allons démontrer deux estimations, la première concernant $(\theta^\varepsilon)^-$, la seconde $|Du^\varepsilon|^2(\theta^\varepsilon)^-$. Ces deux estimations sont obtenues formellement par l'application de la fonction test $(\theta^\varepsilon)^-$ à l'équation vérifiée par θ^ε. Comme les régularités ne permettent pas –à ce stade– d'appliquer cette fonction test, nous allons procéder par approximation. Pour ce faire, pour tout $K > 0$, considérons la fonction $T_K^-(\theta^\varepsilon)$. On a $T_K^-(\theta^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ et $D\big[T_K^-(\theta^\varepsilon)\big] = 0$ p.p. sur $\{x\,;\,|\theta^\varepsilon(x)| > K\}$. Donc d'après la propriété 1.18 des solutions renormalisées $-T_K^-(\theta^\varepsilon)$ est une fonction test admissible pour l'équation vérifiée par θ^ε et,

$$\mu\int_\Omega |\theta^\varepsilon| T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \int_{\{-K<\theta^\varepsilon<0\}} \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))\cdot Du^\varepsilon T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x,$$

d'où, en développant,

$$\mu\int_\Omega |\theta^\varepsilon| T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \int_{\{-K<\theta^\varepsilon<0\}} \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x + \int_\Omega ADu^\varepsilon\cdot Du^\varepsilon T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x.$$

D'après les propriétés de coercivité de l'opérateur $\mathbf{a}$ et de la matrice A, chaque terme du membre de gauche de l'égalité ci-dessus est positif. Il vient

$$\mu\int_\Omega |\theta^\varepsilon| T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \delta\int_{\{-K<\theta^\varepsilon<0\}} |D\theta^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x + \gamma\int_\Omega |Du^\varepsilon|^2 T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x,$$

et par l'inégalité de Young,

$$\mu\int_\Omega |\theta^\varepsilon| T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \delta\int_{\{-K<\theta^\varepsilon<0\}} |D\theta^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |Du^\varepsilon|^2 T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2\gamma}\int_\Omega |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2 T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x. \tag{2.18}$$

D'après le comportement de f sur $\mathbb{R}^-$, il existe $r_1 \in \mathbb{R}^-$ tel que

$$\forall r \in]-\infty, r_1], \quad |f(r)|^2 \le \gamma\mu|r|.$$

De cette propriété, on déduit de l'inégalité (2.18), pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{|r_1|}$,

$$\begin{aligned}
\mu\int_\Omega |\theta^\varepsilon| T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x &+ \delta\int_{\{-K<\theta^\varepsilon<0\}} |D\theta^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |Du^\varepsilon|^2 T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{\mu}{2}\int_{\{\theta^\varepsilon<r_1\}} |T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\theta^\varepsilon)| T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\gamma}\int_{\{r_1\le\theta^\varepsilon\le 0\}} |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2 T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{\mu}{2}\int_{\{\theta^\varepsilon<r_1\}} |\theta^\varepsilon| T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \frac{|r_1|}{2\gamma}\operatorname{mes}\{\Omega\}\sup_{r\in[r_1,0]} |f(r)|^2.
\end{aligned}$$

À une sous-suite près (on considère $\varepsilon < \frac{1}{|r_1|}$), on a donc pour tout $K > 0$,

$$\frac{\mu}{2}\int_\Omega |\theta^\varepsilon| T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \delta\int_{\{-K<\theta^\varepsilon<0\}} |D\theta^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |Du^\varepsilon|^2 T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \frac{|r_1|}{2\gamma}\operatorname{mes}\{\Omega\}\sup_{r\in[r_1,0]} |f(r)|^2.$$

On en déduit alors l'inégalité suivante, pour tout $K > 0$,

$$\int_\Omega |\theta^\varepsilon| T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \int_{\{-K<\theta^\varepsilon<0\}} |D\theta^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |Du^\varepsilon|^2 T_K^-(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le C_1,$$

où C_1 est une constante indépendante de K et ε. Faisons tendre K vers $+\infty$, on obtient alors que

$$\int_\Omega |(\theta^\varepsilon)^-|^2 \, dx + \int_\Omega |D((\theta^\varepsilon)^-)|^2 \, dx + \int_\Omega |Du^\varepsilon|^2 (\theta^\varepsilon)^- \, dx \le C_1$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $K > 0$, $T_K^-(\theta^\varepsilon) \in H_0^1(\Omega)$ et $T_K^-(\theta^\varepsilon)$ est bornée uniformément en K dans $H_0^1(\Omega)$. On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, $(\theta^\varepsilon)^- \in H_0^1(\Omega)$. L'inégalité précédente entraîne que $|Du^\varepsilon|^2(\theta^\varepsilon)^- \in L^1(\Omega)$ et les estimations suivantes,

$$(\theta^\varepsilon)^- \text{ est bornée uniformément en } \varepsilon \text{ dans } H_0^1(\Omega), \tag{2.19}$$

$$|Du^\varepsilon|^2(\theta^\varepsilon)^- \text{ est bornée uniformément en } \varepsilon \text{ dans } L^1(\Omega). \tag{2.20}$$

<u>2èmes estimations</u>

Comme la fonction continue vérifie, sur $\mathbb{R}^-$, l'hypothèse H-1 du théorème 1.2, nous allons rependre l'égalité (1.40), qui est essentielle dans la démonstration du théorème 1.2, ainsi que les estimations sur θ^ε et u^ε.

Ainsi pour tout $K > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda K \int_\Omega (u^\varepsilon)^2 \, dx + \mu \int_\Omega \theta^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon) \, dx + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon) \cdot DT_K(\theta^\varepsilon) \, dx \\
+ \int_\Omega A \left(Du^\varepsilon - \tfrac{1}{2} A^{-1} f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \right) \cdot \left(Du^\varepsilon - \tfrac{1}{2} A^{-1} f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \right) (K - T_K(\theta^\varepsilon)) \, dx \\
= \frac{1}{4} \int_\Omega A^{-1} f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \cdot f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) (K - T_K(\theta^\varepsilon)) \, dx + K \int_\Omega g u^\varepsilon \, dx,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

et de plus (voir (1.42)),

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta^\varepsilon\|_{L1(\Omega)} \le C_2, \quad \text{où } C_2 \text{ est une constante indépendante de } \varepsilon.$$

On en déduit alors les estimations suivantes,

$$\theta^\varepsilon \text{ est bornée uniformément en } \varepsilon \text{ dans } L^1(\Omega), \tag{2.22}$$

$$u^\varepsilon \text{ est bornée uniformément en } \varepsilon \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{2.23}$$

De l'égalité (2.21) et des propriétés de coercivité de l'opérateur $\mathbf{a}$, on obtient que pour tout $K > 0$,

$$\begin{aligned}
\delta \int_\Omega |DT_K(\theta^\varepsilon)|^2 \, dx &\le \frac{1}{4\gamma} \int_\Omega |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2 (K - T_K(\theta^\varepsilon)) \, dx + K \int_\Omega g u^\varepsilon \, dx \\
&\le \frac{K}{2\gamma} \int_{\{\theta^\varepsilon < r_1\}} |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2 \, dx + \frac{K}{2\gamma} \text{mes}\{\Omega\} \sup_{r \in [r_1, K]} |f(r)|^2 \\
&\quad + K \|g\|_{L^2(\Omega)} C_2 \\
&\le \frac{K\mu}{2} \int_{\{\theta^\varepsilon < r_1\}} |T_{\frac{1}{\varepsilon}}(\theta^\varepsilon)| \, dx + K \frac{\text{mes}\{\Omega\}}{2\gamma} \sup_{r \in [r_1, K]} + K \|g\|_{L^2(\Omega)} C_2 \\
&\le K \left(\frac{\mu}{2} \|\theta^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + \frac{\text{mes}\{\Omega\}}{2\gamma} \sup_{r \in [r_1, K]} |f(r)|^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)} C_2 \right),
\end{aligned}$$

L'estimation (2.22) ainsi que l'inégalité précédente entraînent que pour tout $K \ge 0$,

$$\int_\Omega |DT_K(\theta^\varepsilon)|^2 \, dx \le C_3(K), \tag{2.24}$$

où $C_3(K) = K \left(\frac{\mu}{2} C_2 + \frac{\text{mes}\{\Omega\}}{2\gamma} \sup_{r \in [r_1, K]} |f(r)|^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)} C_2 \right)$.
On en déduit donc l'estimation :

$$\text{pour tout } K > 0, \ T_K(\theta^\varepsilon) \text{ est bornée uniformément en } \varepsilon \text{ dans } H_0^1(\Omega). \tag{2.25}$$

Continuons à utiliser l'égalité (2.21) ; on obtient, pour tout $K > 0$,

$$\int_\Omega A\left(Du^\varepsilon - \tfrac{1}{2}A^{-1}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right)\cdot\left(Du^\varepsilon - \tfrac{1}{2}A^{-1}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right)(K - T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x \le C_3(K)$$

soit, après développement et utilisation de l'inégalité de Young et des propriétés de coercivité de A,

$$\int_\Omega |Du^\varepsilon|^2(K - T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{\gamma^2}\int_\Omega |f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2(K - T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\gamma}K\int_\Omega gu^\varepsilon\,\mathrm{d}x.$$

De la même façon que précédemment on obtient, pour tout $K > 0$,

$$\int_\Omega |Du^\varepsilon|^2(K - T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x \le C_4(K),$$

où $C_4(K)$ est une constante indépendante de ε, mais dépendante de K.

Pour $K \ge 1$, il est clair que $1\!\!1_{\{r\le K-1\}} \le K - T_K(r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. L'inégalité ci-dessus entraîne alors l'estimation :

(2.26) pour tout $K > 0$, $1\!\!1_{\{\theta^\varepsilon\le K\}}Du^\varepsilon$ est bornée uniformément en ε dans $(L^2(\Omega))^N$.

Remarque 2.6 Le terme $C_4(K)$ dépend directement du comportement de f sur $\mathbb{R}^+$. Sans hypothèse de croissance sur f, l'inégalité (2.24) ne permet pas d'obtenir, par les techniques d'estimations de Boccardo-Gallouët, les estimations habituelles sur θ^ε dans un espace de Sobolev.

3$^{\text{èmes}}$ estimations

Au stade approché, il ne paraît pas évident que pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et à support compact, on ait $h(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, les estimations précédentes ne suffisent pas. Il manque, par exemple, une estimation sur $u^\varepsilon DT_K(\theta^\varepsilon)$. Le lemme suivant répond à cette question, ainsi qu'aux régularités (2.12), (2.14) et (2.15) (au stade approché) de la définition 2.2. Il permet, de plus, de mieux comprendre la relation –formelle jusqu'à présent– qui existe entre les systèmes S1 et S2. En effet, dans notre cas, le couple $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est solution de S1ε au sens de la définition 1.3 et, les régularités ne permettent pas –jusqu'à présent– de montrer que $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est solution du système S2, dans lequel f^ε remplace f, au sens de la définition 2.2. Encore une fois, il est à noter que le comportement de f sur $\mathbb{R}^-$ est déterminant dans le résultat du lemme.

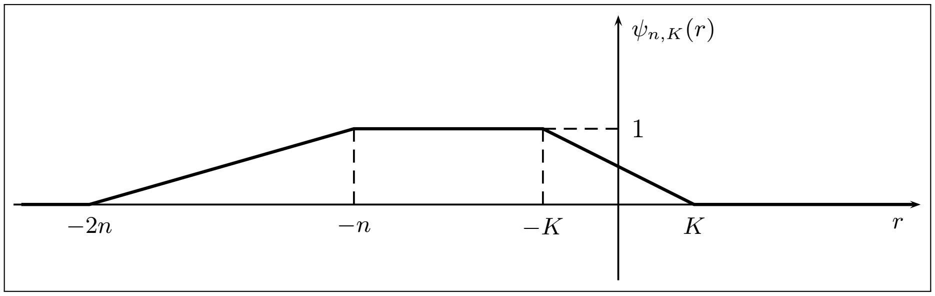
Lemme 2.2 *Pour tout $K > 0$, les fonctions $u^\varepsilon DT_K(\theta^\varepsilon)$ et $u^\varepsilon 1\!\!1_{\{\theta^\varepsilon<K\}}Du^\varepsilon$ sont bornées uniformément en ε dans $(L^2(\Omega))^N$. De plus la fonction $(u^\varepsilon)^2(\theta^\varepsilon)^-$ est bornée uniformément en ε dans $L^1(\Omega)$.*

Preuve du lemme 2.2.

Ces estimations sont obtenues en multipliant formellement l'équation en θ^ε par la fonction test $\dfrac{K - T_K(\theta^\varepsilon)}{K}(u^\varepsilon)^2$. Comme les régularités ne le permettent pas directement, nous procéderons par approximation. Dans un premier temps, pour tout $K' > 0$, nous allons justifier, par approximation, la multiplication de l'équation en θ^ε par $\dfrac{K - T_K(\theta^\varepsilon)}{K}(T_{K'}(u^\varepsilon))^2$. Dans un second temps, nous ferons tendre K' vers l'infini pour obtenir l'estimation désirée.

Soit $K > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > K$, on note $\psi_{n,K}$ la fonction définie par :

$$\psi_{n,K}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \le -2n, \\ \dfrac{2n + r}{n} & \text{si } -2n < r \le -n, \\ 1 & \text{si } -n < r \le -K, \\ \dfrac{K - T_K(r)}{2K} & \text{si } -K < r. \end{cases}$$



La fonction $\psi_{n,K}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et à support compact, et, d'après la définition 1.2 des solutions renormalisées, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\theta^\varepsilon\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon) - \operatorname{div}(\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)) + \psi'_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon = \psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))\cdot Du^\varepsilon \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\otimes).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $K' > 0$, la fonction $(T_{K'}(u^\varepsilon))^2 \in L^\infty(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$ est une fonction test admissible dans l'équation précédente et $D\big[(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\big] = 2T_{K'}(u^\varepsilon)DT_{K'}(u^\varepsilon)$ p.p. dans Ω. Ainsi on a

$$\mu\int_\Omega \theta^\varepsilon(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \psi'_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))\cdot Du^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x. \tag{2.27}$$

Étudions chaque terme de l'égalité précédente et faisons tendre n vers $+\infty$.
D'après la définition de $\psi_{n,K}$, on a successivement ;

- $$\int_\Omega \psi'_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{\{-2n<\theta^\varepsilon<-n\}} \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2K}\int_{\{|\theta^\varepsilon|<K\}} \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x;$$

et d'après les propriétés de l'opérateur $\mathbf{a}$ et la définition 1.2 des solutions renormalisées,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_{\{-2n<\theta^\varepsilon<-n\}} \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

On obtient donc

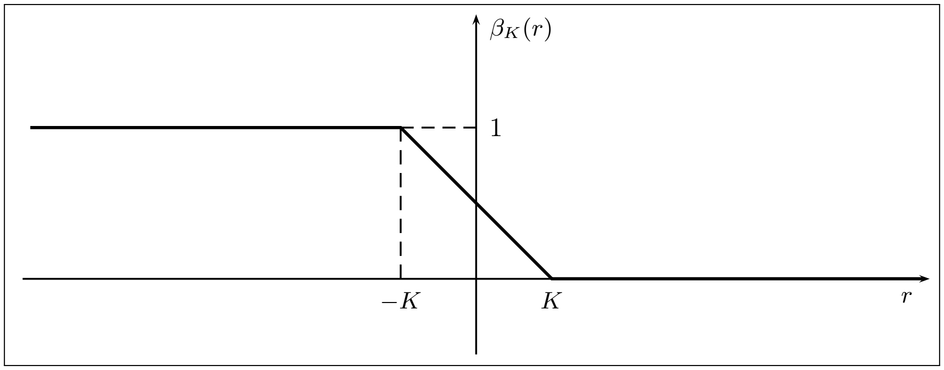
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \psi'_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2K}\int_{\{|\theta^\varepsilon|<K\}} \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x.$$

- Pour le deuxième terme de l'égalité (2.27), on écrit :

$$\int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \int_{\{\theta^\varepsilon<0\}} \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \int_{\{\theta^\varepsilon\geq 0\}} \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x.$$

La régularité de u^ε entraîne que $T_{K'}(u^\varepsilon)DT_{K'}(u^\varepsilon) \in (L^2(\Omega))^N$, et de plus d'après la définition de $\psi_{n,K}$, on a

$$\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} \beta_K(\theta^\varepsilon) \overset{\text{déf}}{=} \frac{K - T_K(\theta^\varepsilon)}{2K} \quad \text{p.p. dans } \Omega \text{ et dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible} *.$$



Sachant que $(\theta^\varepsilon)^- \in H_0^1(\Omega)$, on en déduit, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, que

$$\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<0\}}\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<0\}}\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,\theta^\varepsilon) \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort.}$$

Le terme $\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon\geq 0\}}\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)$ étant indépendant de n, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\psi_{n,K}(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

Dans l'égalité (2.27), les autres termes ne posent aucune difficulté quand $n\to+\infty$, on obtient donc,

$$\begin{aligned}\mu\int_\Omega \theta^\varepsilon(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x&\\ - \frac{1}{2K}\int_\Omega \mathbf{a}(x,DT_K(\theta^\varepsilon))\cdot DT_K(\theta^\varepsilon)\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x&\\ = \int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))\cdot Du^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x.&\end{aligned}$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)ADu^\varepsilon\cdot Du^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2K}\int_\Omega \mathbf{a}(x,DT_K(\theta^\varepsilon))\cdot DT_K(\theta^\varepsilon)\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x&\\ + \mu\int_\Omega (\theta^\varepsilon)^-(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \mu\int_\Omega (\theta^\varepsilon)^+(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x&\\ + 2\int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x.&\end{aligned}$$

Puisque $\beta_K \geq 0$, la coercivité de la matrice A et de l'opérateur $\mathbf{a}$ entraînent que

$$\begin{aligned}(2.28)\quad \gamma\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{K}\int_\Omega |DT_K(\theta^\varepsilon)|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x&\\ + \mu\int_\Omega (\theta^\varepsilon)^-(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \leq \mu\int_\Omega (\theta^\varepsilon)^+(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x&\\ + 2\int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\,T_{K'}(u^\varepsilon)\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x&\\ + \int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x.&\end{aligned}$$

Examinons chacun des termes du membre de droite de l'inégalité ci-dessus. On a successivement, en utilisant l'inégalité de Young et $0 \le \beta_K(r) \le \mathbb{1}_{\{r<K\}}$,

- $$\mu \int_\Omega (\theta^\varepsilon)^+ (T_{K'}(u^\varepsilon))^2 \beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le K\mu \int_\Omega (T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x \le K\mu \int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x,$$

- $$\begin{aligned} 2\int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot DT_{K'}(u^\varepsilon)\, T_{K'}(u^\varepsilon)\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x &\le \frac{4}{\gamma}\int_\Omega |\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)|^2\,\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{\gamma}{4}\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)|DT_{K'}(u^\varepsilon)|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{4}{\gamma}\int_\Omega |\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)|^2\,\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<K\}}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{\gamma}{4}\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x &\le \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma}\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)(T_{K'}(u^\varepsilon))^2|f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)|^2\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{\mu}{2}\int_{\{\theta^\varepsilon<r_1\}} \beta_K(\theta^\varepsilon)(T_{K'}(u^\varepsilon))^2 T_{\frac{1}{\varepsilon}}(|\theta^\varepsilon|)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma}\sup_{r\in[r_1,K]}|f(r)|^2\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<r_1\}} T_{\frac{1}{\varepsilon}}(|\theta^\varepsilon|) \le (\theta^\varepsilon)^-$, les trois inégalités précédentes permettent de déduire de (2.28),

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{4}\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{K}\int_\Omega |DT_K(\theta^\varepsilon)|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \frac{\mu}{2}\int_\Omega (\theta^\varepsilon)^-(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \frac{4}{\gamma}\int_\Omega |\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)|^2\,\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<K\}}\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\qquad + K\mu\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\gamma}\sup_{r\in[r_1,K]}|f(r)|^2\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

En décomposant $\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<K\}} = \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<0\}} + \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{0\le\theta^\varepsilon<K\}}$ et d'après les estimations (2.19), (2.23) et (2.25) et la propriété (1.6) de l'opérateur $\mathbf{a}$, on en déduit qu'il existe $C_3(K) > 0$, une constante indépendante de ε et K' (mais dépendante de K) tel que,

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{4}\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{K}\int_\Omega |DT_K(\theta^\varepsilon)|^2\,(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \frac{\mu}{2}\int_\Omega (\theta^\varepsilon)^-(T_{K'}(u^\varepsilon))^2\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le C_3(K), \quad \text{pour tout } K' > 0, \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

En faisant tendre K' vers $+\infty$, le lemme de Fatou entraîne que pour K fixé et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(2.29)\quad \frac{\gamma}{4}\int_\Omega \beta_K(\theta^\varepsilon)|Du^\varepsilon|^2 (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{K}\int_\Omega |DT_K(\theta^\varepsilon)|^2 (u^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}x + \frac{\mu}{2}\int_\Omega (\theta^\varepsilon)^-(u^\varepsilon)^2\beta_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le C_3(K)$$

Ainsi pour tout $K > 0$, la fonction $u^\varepsilon DT_K(\theta^\varepsilon)$ est bornée uniformément en ε dans $(L^2(\Omega))^N$.

D'après la définition de β_K, pour tout $K > 0$, on a $\mathbb{1}_{\{r\le K\}} \le 4\beta_{2K}(r)$, $\forall r \in \mathbb{R}$. Ainsi on déduit de l'inégalité (2.29), que pour tout $K > 0$, la fonction $\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<K\}}u^\varepsilon Du^\varepsilon$ est bornée uniformément en ε dans $(L^2(\Omega))^N$ et que la fonction $(u^\varepsilon)^2(\theta^\varepsilon)^-$ est bornée uniformément en ε dans $L^1(\Omega)$. ■

Montrons que $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est solution de S2$_\varepsilon$

Le point de départ de la démonstration du théorème 2.1, est de considérer une solution $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ de S1ε au sens de la définition 1.3, pour aboutir –à la fin de la démonstration– à une solution (u, θ) du système S2, au sens de la définition 2.2. Mais la transformation de S1, qui mène à S2, est formelle, et il est clair que les régularités imposées dans la définition ne permettent pas, sans justification, de montrer que $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est solution du système S2ε (le système S2 dans lequel f^ε remplace f), au sens de la définition 2.2. Les estimations précédentes vont répondre à cette question. Dans un premier temps il est clair, d'après les estimations et le lemme 2.2, que $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ vérifie les régularités (2.11)–(2.15), et que pour tout $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, comme $h(\theta^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$ et $u^\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$, on a tout d'abord

$$(2.16)_\varepsilon\quad \lambda u^\varepsilon h(\theta^\varepsilon) - \operatorname{div}(h(\theta^\varepsilon)ADu^\varepsilon) + h'(\theta^\varepsilon)ADu^\varepsilon\cdot D\theta^\varepsilon + \operatorname{div}(h(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) - h'(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon = gh(\theta^\varepsilon) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

De plus pour tout $K' > 0$, $T_{K'}(u^\varepsilon)h(\theta^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$ et

$$D\big[T_{K'}(u^\varepsilon)h(\theta^\varepsilon)\big] = T_{K'}(u^\varepsilon)h'(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon + h(\theta^\varepsilon)DT_{K'}(u^\varepsilon) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

D'après le lemme 2.2, h étant à support compact, on a $u^\varepsilon h'(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon \in (L^2(\Omega))^N$, ce qui nous donne par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$T_{K'}(u^\varepsilon)h'(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon \xrightarrow{K'\to+\infty} u^\varepsilon h'(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort.}$$

Comme $u^\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$, on en déduit :

$$D\big[T_{K'}(u^\varepsilon)h(\theta^\varepsilon)\big] \xrightarrow{K'\to+\infty} u^\varepsilon h'(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon + h(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort,}$$

ce qui donne $h(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ (le point (2.13) de la définition 2.2).

De la même façon, soit $K' > 0$, et considérons $T_K(u^\varepsilon)T_{K'}(\theta^\varepsilon)$, pour tout $K > 0$. On a $T_K(u^\varepsilon)T_{K'}(\theta^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$ et

$$D\big[T_K(u^\varepsilon)T_{K'}(\theta^\varepsilon)\big] = T_K(u^\varepsilon)DT_{K'}(\theta^\varepsilon) + T_{K'}(\theta^\varepsilon)DT_K(u^\varepsilon) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

De la même façon que précédemment, en utilisant le lemme 2.2, on montre que $u^\varepsilon T_{K'}(\theta^\varepsilon) \in H^1_0(\Omega)$ et que $D\big[u^\varepsilon T_{K'}(\theta^\varepsilon)\big] = u^\varepsilon DT_{K'}(\theta^\varepsilon) + T_{K'}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon$ p.p. dans Ω. Ceci va nous permettre, dans le cas bien spécifique du problème approché, de démontrer le point (2.17) de la définition 2.2. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$, $K > 0$ et $K' > K + \|\varphi\|_{L^\infty}$. En écrivant que $T_K(\theta^\varepsilon - \varphi) = T_K\big(T_{K'}(\theta^\varepsilon) - \varphi\big)$, on obtient que $u^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon - \varphi) \in H^1_0(\Omega)$ et que $D\big[u^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\big] = u^\varepsilon DT_K(\theta^\varepsilon - \varphi) + T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)Du^\varepsilon$ p.p. dans Ω. Appliquons cette fonction test à l'équation vérifiée par u^ε, on obtient

$$\lambda\int_\Omega (u^\varepsilon)^2T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u^\varepsilon\big(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big)\cdot DT_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\big(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big)\cdot Du^\varepsilon\,\mathrm{d}x = \int_\Omega gu^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x,$$

Comme $T_K(\theta^\varepsilon - \varphi) \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $DT_K(\theta^\varepsilon - \varphi) = 0$ p.p. dans $\{|\theta^\varepsilon| > K'\}$, d'après la définition 1.3 et les propriétés des solutions renormalisées on a

$$\mu \int_\Omega \theta^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon) \cdot DT_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\big(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big) \cdot Du^\varepsilon\,\mathrm{d}x.$$

Il est clair qu'en additionnant les deux égalités ci-dessus, on obtient

$$\mu \int_\Omega \theta^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon) \cdot DT_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega (u^\varepsilon)^2 T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega g u^\varepsilon T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u^\varepsilon\big(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big) \cdot DT_K(\theta^\varepsilon - \varphi)\,\mathrm{d}x.$$

On obtient donc, que $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est solution de S2ε au sens de la définition 2.2. Dans la suite, nous utiliserons de nouveau le fait que $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ est solution de S1ε pour démontrer des résultats de convergence, puis nous passerons à la limite dans S2ε.

2ème étape : Extraction d'une sous suite et régularités.

Afin de ne pas alourdir les notations, toute sous suite extraite de $(\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (resp. $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$) sera notée $(\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (resp. $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$). Nous allons utiliser une à une les estimations *a priori* démontrées précédemment afin d'obtenir des résultats de convergence.

D'après l'estimation (2.23), soit $u \in L^2(\Omega)$ telle que, à une sous suite près,

$$u^\varepsilon \xrightharpoonup{\varepsilon\to 0} u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

D'après l'estimation (2.26) et le théorème de Rellich, on peut extraire par le procédé de la diagonale une sous suite de $(\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que pour tout entier naturel n,

$$T_n(\theta^\varepsilon) \xrightharpoonup{\varepsilon\to 0} \theta_n \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible,}$$
$$T_n(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \theta_n \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\nu > 0$ on a, $\forall \varepsilon,\, \eta > 0$,

$$\{|\theta^\varepsilon - \theta^\eta| > \nu\} \subset \{|\theta^\varepsilon| > n\} \cup \{|\theta^\eta| > n\} \cup \{|T_n(\theta^\varepsilon) - T_n(\theta^\eta)| > \nu\},$$

on démontre facilement, grâce à l'estimation (2.22) et la convergence forte de $T_n(\theta^\varepsilon)$, que la suite $(\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est de Cauchy en mesure. Il existe donc θ mesurable telle que, à une sous suite près,

$$\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \theta \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{2.30}$$

En utilisant de nouveau l'estimation (2.22), le lemme de Fatou entraîne que $\theta \in L^1(\Omega)$. De plus, pour tout $K > 0$, on a $T_K(\theta) \in H_0^1(\Omega)$ et

$$T_K(\theta^\varepsilon) \xrightharpoonup{\varepsilon\to 0} T_K(\theta) \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.} \tag{2.31}$$

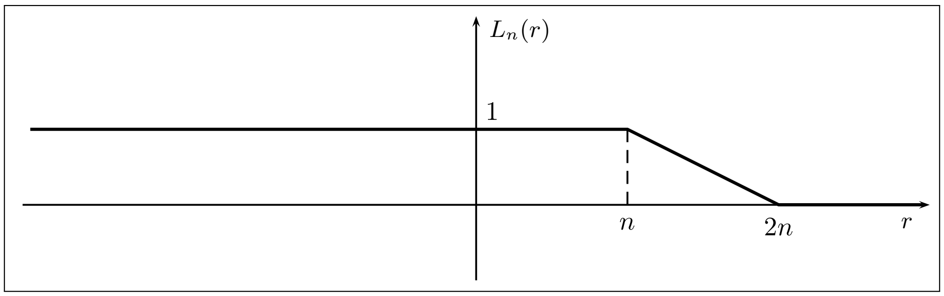
Ainsi, ce dernier résultat et la régularité $\theta \in L^1(\Omega)$ permettent de définir $D\theta$ au sens du «gradient des tronquées» (au sens de la définition 1.1).

D'après l'estimation (2.19) et le théorème de Rellich, on en déduit que, à une sous suite près,

$$(\theta^\varepsilon)^- \xrightharpoonup{\varepsilon\to 0} \theta^- \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible,}$$
$$(\theta^\varepsilon)^- \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \theta^- \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p. dans } \Omega.$$

Afin d'obtenir une régularité sur u et un résultat de convergence presque partout pour u^ε, nous allons utiliser les résultats du lemme 2.2. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction L_n définie par :

$$L_n(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq n, \\ \dfrac{2n-r}{n} & \text{si } n < r \leq 2n, \\ 0 & \text{si } 2n < r. \end{cases}$$



Fixons $\varepsilon > 0$, alors pour tout $K > 0$, la fonction $L_n(\theta^\varepsilon)T_K(u^\varepsilon) \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et de plus

$$\begin{aligned} D\big[L_n(\theta^\varepsilon)T_K(u^\varepsilon)\big] &= L_n(\theta^\varepsilon)DT_K(u^\varepsilon) + T_K(u^\varepsilon)L_n'(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon \\ &= L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<2n\}}DT_K(u^\varepsilon) - \frac{1}{n}T_K(u^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}}D\theta^\varepsilon \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2, $u^\varepsilon\,\mathbb{1}_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}}D\theta^\varepsilon \in (L^2(\Omega))^N$, et $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne donc que

$$\begin{aligned} L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<2n\}}DT_K(u^\varepsilon) &\xrightarrow{K\to+\infty} L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<2n\}}Du^\varepsilon \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort}, \\ T_K(u^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}}D\theta^\varepsilon &\xrightarrow{K\to+\infty} u^\varepsilon\mathbb{1}_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}}D\theta^\varepsilon \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, $L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et $D(L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon) = L_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon + u^\varepsilon L_n'(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon$ p.p. dans Ω. Cette régularité (au stade approché) est nouvelle pour une solution du système S1ε, de plus, d'après le lemme 2.2, on a les estimations :

$$\begin{aligned} L_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon &= L_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon\,\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<2n\}} \text{ est bornée uniformément en } \varepsilon \text{ dans}(L^2(\Omega))^N, \\ u^\varepsilon L_n'(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon &= -\frac{1}{n}u^\varepsilon\,\mathbb{1}_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}}D\theta^\varepsilon \text{ est bornée uniformément en } \varepsilon \text{ dans}(L^2(\Omega))^N. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. À une sous suite près (par un procédé diagonal), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon\to0} v_n \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}, \\ L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon\to0} v_n \quad \text{p.p. dans } \Omega \text{ et dans } L^2(\Omega) \text{ fort}. \end{aligned}$$

En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\nu > 0$, on a $\forall\varepsilon,\, \eta > 0$

$$\{|u^\varepsilon - u^\eta| > \nu\} \subset \{\theta^\varepsilon > n\} \cup \{\theta^\eta > n\} \cup \{|L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon - L_n(\theta^\eta)u^\eta| > \nu\},$$

on démontre facilement, grâce à l'estimation (2.22) et la convergence forte de $L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon$ vers v_n dans $L^2(\Omega)$, que la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est de Cauchy en mesure. Donc, à une sous suite près, on en déduit que

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to0} u \quad \text{p.p. dans } \Omega, \tag{2.32}$$

et comme la fonction L_n est continue, d'après (2.30), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta)u \;\text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible,} \tag{2.33}$$

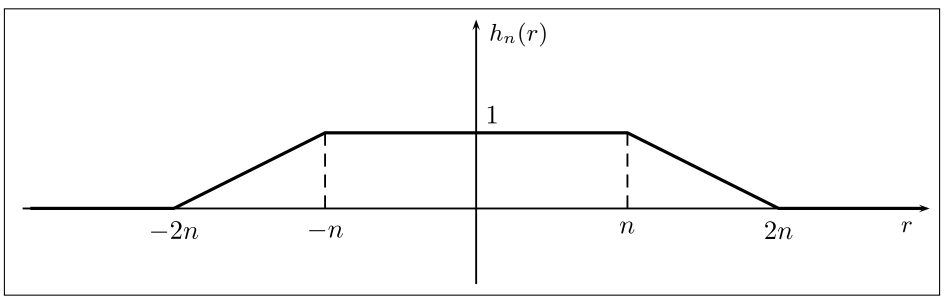
$$L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta)u \;\text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort et } \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{2.34}$$

3ème étape : Convergence presque partout des gradients et régularités.

Nous allons maintenant démontrer la convergence presque partout de $D\theta^\varepsilon$ et Du^ε. La convergence presque partout de $D\theta^\varepsilon$ nous permettra, dans un premier temps, d'obtenir la régularité (2.13) de la définition 2.2 concernant $uh(\theta)$ et ensuite de définir, par le lemme 2.1, Du. Puis nous démontrerons la convergence presque partout de Du^ε, et identifierons sa limite avec Du.

Dans cette étape et les suivantes, nous utiliserons la fonction h_n définie par

$$h_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \le -2n, \\ \dfrac{2n+r}{n} & \text{si } -2n < r \le -n, \\ 1 & \text{si } -n < r \le n, \\ \dfrac{2n-r}{n} & \text{si } n < r \le 2n, \\ 0 & \text{si } 2n < r. \end{cases}$$



Convergence presque partout de $D\theta^\varepsilon$ vers $D\theta$ quand $\varepsilon \to 0$

Nous commencerons par montrer que $D\theta^\varepsilon$ converge presque partout vers $D\theta$ quand $\varepsilon \to 0$. Pour ce faire nous allons tout d'abord démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la suite $\big(DT_n(\theta^\varepsilon)\big)_{\varepsilon>0}$ est de Cauchy en mesure.

Preuve de la convergence en mesure de $DT_n(\theta^\varepsilon)$.
Fixons n dans $\mathbb{N}^*$. D'après la définition 1.3, comme $h_n \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et est à support compact, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mu h_n(\theta^\varepsilon)\theta^\varepsilon - \operatorname{div}\big[h_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\big] + h_n'(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon \\ = h_n(\theta^\varepsilon)\big(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big)\cdot Du^\varepsilon \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Posons $F_{\varepsilon,n} = h_n(\theta^\varepsilon)\big(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big)\cdot Du^\varepsilon - \mu h_n(\theta^\varepsilon)\theta^\varepsilon - h_n'(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon$.
Comme h_n est à support compact dans $\mathbb{R}$, les estimations (2.25) et (2.26) entraînent que $F_{\varepsilon,n}$ est bornée uniformément en ε dans $L^1(\Omega)$. Pour ε et $\eta > 0$, en appliquant à la différence des équations $(2.35)_\varepsilon$ et $(2.35)_\eta$, la fonction test $T_\zeta\big(T_{2n+1}(\theta^\varepsilon) - T_{2n+1}(\theta^\eta)\big)$ avec $1 > \zeta > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \big[h_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon) - h_n(\theta^\eta)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\eta)\big]\cdot DT_\zeta\big(T_{2n+1}(\theta^\varepsilon) - T_{2n+1}(\theta^\eta)\big)\,\mathrm{d}x \\ = \int_\Omega (F_{\varepsilon,n} - F_{\eta,n})T_\zeta\big(T_{2n+1}(\theta^\varepsilon) - T_{2n+1}(\theta^\eta)\big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pour $1 > \zeta > 0$, cette égalité, d'après la définition de $F_{\varepsilon,n}$ et h_n, peut s'écrire :

$$\begin{aligned}&\int_{\{|\theta^\varepsilon-\theta^\eta|<\zeta\}} h_n(\theta^\varepsilon)\big[\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)-\mathbf{a}(x,D\theta^\eta)\big]\cdot\big[D\theta^\varepsilon-D\theta^\eta\big]\,\mathrm{d}x\\ &=\int_{\{|\theta^\varepsilon-\theta^\eta|<\zeta\}} \mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot\big[D\theta^\varepsilon-D\theta^\eta\big]\big(h_n(\theta^\eta)-h_n(\theta^\varepsilon)\big)\,\mathrm{d}x+\int_\omega (F_{\varepsilon,n}-F_{\eta,n})T_\zeta(\theta^\varepsilon-\theta^\eta)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de monotonie de l'opérateur $\mathbf{a}$, l'estimation (2.25) et le fait que h_n est lipschitzienne, on déduit de l'égalité ci-dessus qu'il existe C_1, une constante indépendante de ε et η, telle que pour tout ε, $\eta > 0$ et tout $1 > \zeta > 0$ suffisamment petit,

$$\int_{\{|T_n(\theta^\varepsilon)-T_n(\theta^\eta)|<\zeta\}} \big[\mathbf{a}(x,DT_n(\theta^\varepsilon))-\mathbf{a}(x,DT_n(\theta^\eta))\big]\cdot\big[DT_n(\theta^\varepsilon)-DT_n(\theta^\eta)\big]\,\mathrm{d}x\le C_1\zeta. \tag{2.36}$$

En utilisant le fait que $T_n(\theta^\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}T_n(\theta)$, l'inégalité (2.36) et les propriétés de l'opérateur $\mathbf{a}$, on, démontre de la même façon que dans [8], que la suite $\big(DT_n(\theta^\varepsilon)\big)_{\varepsilon>0}$ est de Cauchy en mesure. ∎

Par suite, pour tout $\nu > 0$ et n dans $\mathbb{N}^*$, l'inclusion

$$\{|D\theta^\varepsilon-D\theta^\eta|\ge\nu\}\subset\{|\theta^\varepsilon|>n\}\cup\{|\theta^\eta|>n\}\cup\{|DT_n(\theta^\varepsilon)-DT_n(\theta^\eta)|\ge\nu\}, \tag{2.37}$$

la propriété précédente et l'estimation (2.22) impliquent que $(D\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est de Cauchy en mesure.

À une sous suite près, on en déduit que $(D\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers un champ de vecteur, noté v, presque partout dans Ω quand $\varepsilon\to 0$. D'après les résultats de convergence (2.30) et (2.31), nous savons que $h_n(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon = h_n(\theta^\varepsilon)DT_{2n}(\theta^\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}h_n(\theta)DT_{2n}(\theta)$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible. De plus $h(\theta^\varepsilon)D\theta^\varepsilon\xrightarrow{\varepsilon\to 0}h(\theta)v$ p.p. dans Ω. Comme $\theta\in L^1(\Omega)$, (et d'après la définition 1.1) il est clair que $v = D\theta$ p.p. dans Ω et donc

$$D\theta^\varepsilon\xrightarrow{\varepsilon\to 0}D\theta\quad\text{p.p. dans }\Omega. \tag{2.38}$$

Montrons que (u,θ) vérifie la régularité (2.13)

Utilisons ce résultat de convergence pour démontrer que, pour tout $h\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et à support compact, $uh(\theta)\in H_0^1(\Omega)$.

Commençons par un résultat intermédiaire. D'après le lemme 2.2, on a pour tout $K > 0$, $u^\varepsilon DT_K(\theta^\varepsilon)$ bornée uniformément en ε dans $(L^2(\Omega))^N$. Les résultats de convergence (2.38) et (2.32), et le lemme de Fatou entraînent que

$$\forall K>0,\quad uDT_K(\theta)\in(L^2(\Omega))^N. \tag{2.39}$$

Poursuivons la démonstration, en utilisant d'après l'étape précédente, le fait que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $L_n(\theta)u\in H_0^1(\Omega)$.
Soient $h\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact, et $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{supp}h\subset[-n,n]$. Pour $K > 0$, considérons la fonction $h(\theta)T_K(L_n(\theta)u)$. D'après les résultats de régularités on a

$$\begin{gathered}h(\theta)T_K(L_n(\theta)u)\in L^\infty(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\\ D\big[h(\theta)T_K(L_n(\theta)u)\big]=h'(\theta)T_K(L_n(\theta)u)\,D\theta+h(\theta)\,DT_K\big(L_n(\theta)u\big)\quad\text{p.p. dans }\Omega.\end{gathered}$$

Le choix de n et l'estimation (2.39) impliquent :

$$\begin{gathered}\big|h'(\theta)T_K(L_n(\theta)u)\,D\theta\big|\le\big|h'(\theta)uDT_{2n}(\theta)\big|\in L^2(\Omega),\\ \big|h(\theta)\,DT_K(L_n(\theta)u)\big|\le\big|h(\theta)\,D(L_n(\theta)u)\big|\in L^2(\Omega).\end{gathered}$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraînent :

$$\begin{aligned} h'(\theta)T_K\big(L_n(\theta)u\big)\,D\theta &\xrightarrow{K\to+\infty} h'(\theta)uDT_{2n}(\theta) \ \text{ fortement dans } (L^2(\Omega))^N,\\ h(\theta)\,DT_K\big(L_n(\theta)u\big) &\xrightarrow{K\to+\infty} h(\theta)\,D\big(L_n(\theta)u\big) \ \text{ fortement dans } (L^2(\Omega))^N. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$h(\theta)T_K\big(L_n(\theta)u\big) \xrightarrow{K\to+\infty} h(\theta)L_n(\theta)u = h(\theta)u \ \text{ fortement dans } H_0^1(\Omega),$$

Ainsi $uh(\theta) \in H_0^1(\Omega)$ et d'après (2.39), le lemme 2.1 permet de définir Du presque partout dans Ω.

Convergence presque partout de Du^ε vers Du quand $\varepsilon \to 0$

D'après le lemme 2.2, pour tout $K > 0$, on a $\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<K\}}u^\varepsilon Du^\varepsilon$ bornée uniformément en ε dans $(L^2(\Omega))^N$. Afin de démontrer cette régularité pour $\mathbb{1}_{\{\theta<K\}}uDu$, (voir (2.14) de la définition 2.2), nous allons démontrer que Du^ε converge vers Du presque partout dans Ω. Pour ce faire, nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est de Cauchy dans $L^1(\Omega)$.*

Preuve du lemme 2.3.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $K > 2n+1$, ainsi $h_n \circ T_K = h_n$.
Soient ε, $\eta > 0$, et décomposons l'ensemble Ω comme suit, pour tout $\nu > 0$,

$$\begin{aligned} \Omega =& \{|\theta^\varepsilon - \theta^\eta| \geq \sqrt{\nu}\} \cup \{|\theta^\varepsilon - \theta^\eta| < \sqrt{\nu},\, |u^\varepsilon - u^\eta| < \nu\}\\ &\cup \{|\theta^\varepsilon - \theta^\eta| < \sqrt{\nu},\, |u^\varepsilon - u^\eta| \geq \nu\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3. \end{aligned}$$

Cette partition de Ω, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_\Omega |h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta|\,\mathrm{d}x &= \sum_{1\leq i\leq 3}\int_{B_i} |h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta|\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{I}_{\varepsilon,\eta,\nu} + \mathrm{II}_{\varepsilon,\eta,\nu} + \mathrm{III}_{\varepsilon,\eta,\nu}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Étudions chaque terme de l'égalité ci-dessus.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne,

$$\mathrm{I}_{\varepsilon,\eta,\nu} \leq (\mathrm{mes}\{B_1\})^{1/2} \times \left\|h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta\right\|_{(L^2(\Omega))^N}.$$

La fonction h_n étant à support compact, on déduit de l'estimation (2.26) que

$$\mathrm{I}_{\varepsilon,\eta,\nu} \leq C_1 \times (\mathrm{mes}\{B_1\})^{1/2} \leq C_1(\mathrm{mes}\{|\theta^\varepsilon - \theta^\eta| \geq \sqrt{\nu}\})^{1/2},$$

où C_1 est une constante indépendante de ε et η (mais dépendant de n).

La convergence presque partout de θ^ε entraîne alors que pour tout $\nu > 0$,

$$\lim_{(\varepsilon,\eta)\to 0} \mathrm{I}_{\varepsilon,\eta,\nu} = 0.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient que

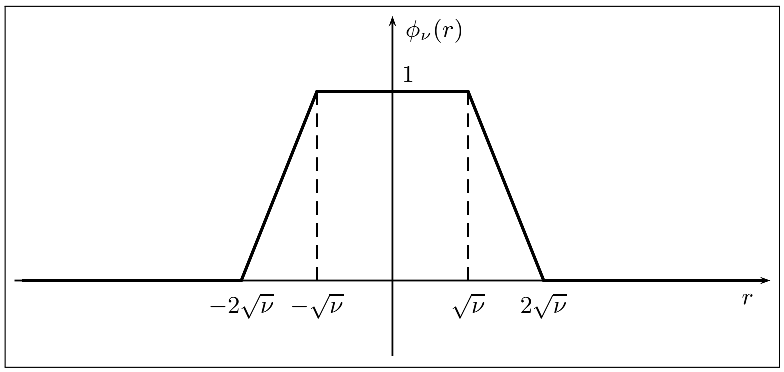
$$\mathrm{III}_{\varepsilon,\eta,\nu} \leq C_1 \times \mathrm{mes}\{B_3\}^{1/2} \leq C_1 \times (\mathrm{mes}\{|u^\varepsilon - u^\eta| \geq \nu\})^{1/2}.$$

La convergence presque partout de u^ε entraîne alors que pour tout $\nu > 0$,

$$\lim_{(\varepsilon,\eta)\to 0} \mathrm{III}_{\varepsilon,\eta,\nu} = 0.$$

Étudions le terme $\mathrm{II}_{\varepsilon,\eta,\nu}$. Pour cela, introduisons la fonction ϕ_ν définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\phi_\nu(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r \leq -2\sqrt{\nu}, \\ \dfrac{2\sqrt{\nu}+r}{\sqrt{\nu}} & \text{pour } -2\sqrt{\nu} < r \leq -\sqrt{\nu}, \\ 1 & \text{pour } -\sqrt{\nu} < r \leq \sqrt{\nu}, \\ \dfrac{2\sqrt{\nu}-r}{\sqrt{\nu}} & \text{pour } \sqrt{\nu} < r \leq 2\sqrt{\nu}, \\ 0 & \text{pour } 2\sqrt{\nu} < r. \end{cases}$$



Remarquons que $\mathbb{1}_{[-\sqrt{\nu},\sqrt{\nu}]} \leq \phi_\nu \leq \mathbb{1}_{]-2\sqrt{\nu},2\sqrt{\nu}[}$ et que $\phi_\nu' = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}(\mathbb{1}_{]-2\sqrt{\nu},-\sqrt{\nu}[} - \mathbb{1}_{]\sqrt{\nu},2\sqrt{\nu}[})$ p.p. dans $\mathbb{R}$.

Majorons le terme $\mathrm{II}_{\varepsilon,\eta,\nu}$; par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient

$$(2.41)\qquad \begin{aligned} \mathrm{II}_{\varepsilon,\eta,\nu} &\leq (\mathrm{mes}\{\Omega\})^{1/2} \left(\int_{B_2} |h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon) Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta) Du^\eta|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \\ &\leq (\mathrm{mes}\{\Omega\})^{1/2} \left(\int_{\{|u^\varepsilon - u^\eta| < \nu\}} |h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon) Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta) Du^\eta|^2 \, \phi_\nu(\theta^\varepsilon - \theta^\eta) \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour contrôler le terme ci-dessus, appliquons à l'équation vérifiée par u^ε la fonction test $h_n(\theta^\varepsilon) T_\nu(u^\varepsilon - u^\eta) \phi_\nu(\theta_K^\varepsilon - \theta_K^\eta) \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (avec $\theta_K^\varepsilon = T_K(\theta^\varepsilon)$), et à l'équation vérifiée par u^η, la fonction test $h_n(\theta^\eta) T_\nu(u^\varepsilon - u^\eta) \phi_\nu(\theta_K^\varepsilon - \theta_K^\eta) \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et faisons la différence des égalités obtenues. Après calculs et en posant

$$G_\varepsilon = -\lambda u^\varepsilon h_n(\theta^\varepsilon) - h_n'(\theta^\varepsilon) A Du^\varepsilon \cdot D\theta^\varepsilon + h_n'(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \cdot D\theta^\varepsilon + g h_n(\theta^\varepsilon),$$

on obtient l'égalité suivante,

$$\begin{aligned} &(\mathsf{A}_{\varepsilon,\eta,\nu}) && \int_{\{|u^\varepsilon - u^\eta| < \nu\}} A(h_n(\theta^\varepsilon) Du^\varepsilon - h_n(\theta^\eta) Du^\eta) \cdot (Du^\varepsilon - Du^\eta) \phi_\nu(\theta_K^\varepsilon - \theta_K^\eta) \,\mathrm{d}x \\ &(\mathsf{B}_{\varepsilon,\eta,\nu}) && + \int_\Omega A(h_n(\theta^\varepsilon) Du^\varepsilon - h_n(\theta^\eta) Du^\eta) \cdot (D\theta_K^\varepsilon - D\theta_K^\eta) \phi_\nu'(\theta_K^\varepsilon - \theta_K^\eta) T_\nu(u^\varepsilon - u^\eta) \,\mathrm{d}x \\ &(\mathsf{C}_{\varepsilon,\eta,\nu}) && - \int_{\{|u^\varepsilon - u^\eta| < \nu\}} (h_n(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) - h_n(\theta^\eta) f^\eta(\theta^\eta)) \cdot (Du^\varepsilon - Du^\eta) \phi_\nu(\theta_K^\varepsilon - \theta_K^\eta) \,\mathrm{d}x \\ &(\mathsf{D}_{\varepsilon,\eta,\nu}) && - \int_\Omega (h_n(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) - h_n(\theta^\eta) f^\eta(\theta^\eta)) \cdot (D\theta_K^\varepsilon - D\theta_K^\eta) \phi_\nu'(\theta_K^\varepsilon - \theta_K^\eta) T_\nu(u^\varepsilon - u^\eta) \,\mathrm{d}x \\ &(\mathsf{E}_{\varepsilon,\eta,\nu}) && = (G_\varepsilon - G_\eta) T_\nu(u^\varepsilon - u^\eta) \phi_\nu(\theta_K^\varepsilon - \theta_K^\eta) \end{aligned}$$

Étudions le comportement de chaque terme dans l'égalité ci-dessus.

• Étude de $\mathsf{E}_{\varepsilon,\eta,\nu}$.

D'après les estimations (2.23), (2.25) et (2.26) et la définition de G_ε, on en déduit que G_ε est bornée uniformément en ε dans $L^1(\Omega)$. La définition de T_ν et de ϕ_ν entraîne donc que

$$\forall\varepsilon,\ \eta>0 \quad |\mathsf{E}_{\varepsilon,\eta,\nu}|\le C_2\nu.$$

• Étude de $\mathsf{D}_{\varepsilon,\eta,\nu}$.

D'après l'estimation (2.25), $D\theta_K^\varepsilon - D\theta_K^\eta$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^N$ uniformément en ε et η, et de plus, on a $|\phi_\nu'(\theta_K^\varepsilon-\theta_K^\eta)T_\nu(u^\varepsilon-u^\eta)|\le\sqrt{\nu}$. On obtient donc la majoration suivante, pour tout $\nu>0$,

$$|\mathsf{D}_{\varepsilon,\eta,\nu}|\le\sqrt{\nu}C_3\big\|h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)-h_n(\theta^\eta)f^\eta(\theta^\eta)\big\|_{(L^2(\Omega))^N},$$

où C_3 est une constante indépendante de ε et η.

Nous avons choisi $K>2n+1$, donc la suite $h_n(\theta_K^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)=h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ converge presque partout dans Ω vers $h_n(\theta)f(\theta)$ et est bornée dans $(L^\infty(\Omega))^N$, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la suite $h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ est de Cauchy dans $(L^2(\Omega))^N$.

On obtient donc :

$$\forall\nu>0,\quad \lim_{(\varepsilon,\eta)\to 0}\mathsf{D}_{\varepsilon,\eta,\nu}=0.$$

• Étude de $\mathsf{C}_{\varepsilon,\eta,\nu}$.

Remarquons tout d'abord que l'inclusion

$$\{|h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)-h_n(\theta^\eta)f^\eta(\theta^\eta)|\neq 0\}\subset\{|\theta^\varepsilon|<2n\}\cup\{|\theta^\eta|<2n\},$$

entraîne l'inégalité suivante,

$$\mathbb{1}_{\{|h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)-h_n(\theta^\eta)f^\eta(\theta^\eta)|\neq 0\}}\phi_\nu(\theta_K^\varepsilon-\theta_K^\eta)\le\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon|<2n,\,|\theta_K^\varepsilon-\theta_K^\eta|<2\sqrt{\nu}\}}+\mathbb{1}_{\{|\theta^\eta|<2n,\,|\theta_K^\varepsilon-\theta_K^\eta|<2\sqrt{\nu}\}}.$$

Comme $K>2n+1$, si $\nu>0$ est assez petit, on obtient que pour tout ε, $\eta>0$,

$$\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon|<2n,\,|\theta_K^\varepsilon-\theta_K^\eta|<2\sqrt{\nu}\}}=\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon|<2n,\,|\theta^\varepsilon-\theta_K^\eta|<2\sqrt{\nu}\}}\le\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon|<2n,\,|\theta^\eta|<K\}}.$$

On en déduit que pour tout ε, $\eta>0$ et $\nu>0$ suffisamment petit,

$$\mathbb{1}_{\{|h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)-h_n(\theta^\eta)f^\eta(\theta^\eta)|\neq 0\}}\phi_\nu(\theta_K^\varepsilon-\theta_K^\eta)\le 2\times\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon|<K,\,|\theta^\eta|<K\}}.$$

Cette inégalité permet de majorer $\mathsf{C}_{\varepsilon,\eta,\nu}$; pour $\nu>0$ suffisamment petit, et tout ε, $\eta>0$, on a

$$\begin{aligned}|\mathsf{C}_{\varepsilon,\eta,\nu}|&\le\int_{\{|u^\varepsilon-u^\eta|<\nu\}}\big|h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)-h_n(\theta^\eta)f^\eta(\theta^\eta)\big|\times\big|Du^\varepsilon-Du^\eta\big|\phi_\nu(\theta_K^\varepsilon-\theta_K^\eta)\,\mathrm{d}x\\&\le 2\int_{\{|u^\varepsilon-u^\eta|<\nu\}}\big|h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)-h_n(\theta^\eta)f^\eta(\theta^\eta)\big|\times\big|Du^\varepsilon-Du^\eta\big|\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon|<K,\,|\theta^\eta|<K\}}\,\mathrm{d}x\\&\le 2\big\|h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)-h_n(\theta^\eta)f^\eta(\theta^\eta)\big\|_{(L^2(\Omega))^N}\left(\big\|\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon|<K,\,|\theta^\eta|<K\}}(Du^\varepsilon-Du^\eta)\big\|_{(L^2(\Omega))^N}\right).\end{aligned}$$

La suite $h_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ étant de Cauchy dans $(L^2(\Omega))^N$, l'estimation (2.26) entraîne que pour tout $\nu>0$ suffisamment petit,

$$\lim_{(\varepsilon,\eta)\to 0}\mathsf{C}_{\varepsilon,\eta,\nu}=0.$$

• Étude de $\mathsf{B}_{\varepsilon,\eta,\nu}$.

En utilisant de nouveau le fait que $|\phi'(\theta_K^\varepsilon-\theta_K^\eta)T_\nu(u^\varepsilon-u^\eta)|\le\sqrt{\nu}$, et l'estimation (2.25) on obtient, pour tout ε ,$\eta>0$,

$$\begin{aligned}|\mathsf{B}_{\varepsilon,\eta,\nu}|&\le\big\|A\big\|_{L^\infty}\sqrt{\nu}\big\|h_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon-h_n(\theta^\eta)Du^\eta\big\|_{(L^2(\Omega))^N}\times\big\|D\theta_K^\varepsilon-D\theta_K^\eta\big\|_{(L^2(\Omega))}\\&\le C_4\sqrt{\nu},\end{aligned}\tag{2.42}$$

où C_4 est une constante indépendante de ν, ε et η.

• Étude de $\mathsf{A}_{\varepsilon,\eta,\nu}$.

La matrice A étant symétrique, on écrit :

$$\mathsf{A}_{\varepsilon,\eta,\nu} = \int_{\{|u^\varepsilon - u^\eta|<\nu\}} A\big(h_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n(\theta^\eta)Du^\eta\big)\cdot(Du^\varepsilon - Du^\eta)\phi_\nu(\theta^\varepsilon_K - \theta^\eta_K)\,\mathrm{d}x \tag{2.43}$$

$$= \int_{\{|u^\varepsilon - u^\eta|<\nu\}} A\big(h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta\big)\cdot\big(h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta\big)\phi_\nu(\theta^\varepsilon_K - \theta^\eta_K)\,\mathrm{d}x$$

$$- \int_{\{|u^\varepsilon - u^\eta|<\nu\}} ADu^\varepsilon\cdot Du^\eta\big(h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon) - h_n^{1/2}(\theta^\eta)\big)^2\phi_\nu(\theta^\varepsilon_K - \theta^\eta_K)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $K > 2n+1$, pour tout $\nu > 0$ suffisamment petit, on a successivement en utilisant le fait que la fonction h_n est lipschitzienne, de constante de Lipschitz $\frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned}\big(h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon) - h_n^{1/2}(\theta^\eta)\big)^2\phi_\nu(\theta^\varepsilon_K - \theta^\eta_K) &\le \big(h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon) - h_n^{1/2}(\theta^\eta)\big)^2\,\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon_K - \theta^\eta_K|<2\sqrt{\nu}\}}\\ &\le \big|h_n(\theta^\varepsilon) - h_n(\theta^\eta)\big|\,\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon - \theta^\eta|<2\sqrt{\nu},\,|\theta^\varepsilon|<K,\,|\theta^\eta|<K\}}\\ &\le \frac{2}{n}\sqrt{\nu}\,\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon|<K,\,|\theta^\eta|<K\}}\ \text{p.p. dans } \Omega,\end{aligned}$$

et,

$$\big|h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta\big|^2\phi_\nu(\theta^\varepsilon_K - \theta^\eta_K) = \big|h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta\big|^2\phi_\nu(\theta^\varepsilon - \theta^\eta).$$

Ainsi, on obtient l'inégalité suivante pour $\nu > 0$ suffisamment petit et tout ε, $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\{|u^\varepsilon - u^\eta|<\nu\}} ADu^\varepsilon\cdot Du^\eta\big(h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon) - h_n^{1/2}(\theta^\eta)\big)^2\phi_\nu(\theta^\varepsilon_K - \theta^\eta_K)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\qquad\le \frac{4}{n}\sqrt{\nu}\|A\|_{L^\infty}\int_\Omega |Du^\varepsilon|\times|Du^\eta|\mathbb{1}_{\{|\theta^\varepsilon|<K,\,|\theta^\eta|<K\}}\,\mathrm{d}x\\ &\qquad\le C_5\sqrt{\nu},\end{aligned}$$

où C_5 est une constante indépendante de ν, ε et η.

Rappelons que $\mathsf{A}_{\varepsilon,\eta,\nu}+\mathsf{B}_{\varepsilon,\eta,\nu}+\mathsf{C}_{\varepsilon,\eta,\nu}+\mathsf{D}_{\varepsilon,\eta,\nu}=\mathsf{E}_{\varepsilon,\eta,\nu}$, ainsi grâce à l'étude de chaque terme de cette égalité, (2.43) et la coercivité de la matrice A entraînent que, pour $\nu > 0$ suffisamment petit et tout ε, $\eta > 0$,

$$\int_{\{|u^\varepsilon - u^\eta|<\nu\}} \big|h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta\big|^2\phi_\nu(\theta^\varepsilon_K - \theta^\eta_K)\,\mathrm{d}x \le C_6\big(\sqrt{\nu} + \nu\big) + F_{\varepsilon,\eta,\nu}, \tag{2.44}$$

où C_6 est une constante indépendante de ν, ε et η, et $\mathrm{F}_{\varepsilon,\eta,\nu}$ est telle que, pour tout $\nu > 0$, $\lim_{(\varepsilon,\eta)\to 0} \mathrm{F}_{\varepsilon,\eta,\nu} = 0$.

Cette propriété étant démontrée, nous pouvons montrer le résultat désiré. En effet d'après (2.40), (2.41) et (2.44), on a pour $\nu > 0$ suffisamment petit et tout ε, $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big|h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta\big|\,\mathrm{d}x &\le \mathrm{I}_{\varepsilon,\eta,\nu} + \mathrm{II}_{\varepsilon,\eta,\nu} + \mathrm{III}_{\varepsilon,\eta,\nu}\\ &\le \mathrm{I}_{\varepsilon,\eta,\nu} + \mathrm{III}_{\varepsilon,\eta,\nu} + \big(\mathrm{mes}\{\Omega\}C_6\big(\sqrt{\nu}+\nu\big) + F_{\varepsilon,\eta,\nu}\big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Cette inégalité, ajoutée aux propriétés de $\mathrm{I}_{\varepsilon,\eta,\nu}$, $\mathrm{III}_{\varepsilon,\eta,\nu}$ et $\mathrm{F}_{\varepsilon,\eta,\nu}$, entraîne que pour tout $\omega > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout ε, $\eta < \varepsilon_0$,

$$\int_\Omega \big|h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta\big|\,\mathrm{d}x \le \omega.$$

Le lemme est démontré. ■

Nous allons utiliser le lemme précédent pour démontrer que Du^ε converge presque partout Du. En effet, comme pour tout $\nu > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et ε, $\eta > 0$ on a

$$\{|Du^\varepsilon - Du^\eta| > \nu\} \subset \{|\theta^\varepsilon| > n\} \cup \{|\theta^\eta| > n\} \cup \{|h_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon - h_n^{1/2}(\theta^\eta)Du^\eta| > \nu\},$$

on démontre facilement, grâce au lemme précédent et à l'estimation (2.22), que la suite $(Du^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est de Cauchy en mesure. À une sous suite près, soit w tel que Du^ε converge vers w presque partout dans Ω quand $\varepsilon \to 0$.

Il nous reste à montrer que $w = Du$ p.p. dans Ω, Du étant défini par le lemme 2.1. Quitte à extraire de nouveau une sous suite, on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $h_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} h_n(\theta)u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible. La continuité de h_n implique que $h_n(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} h_n(\theta)$ p.p. dans Ω et dans $L^\infty(\Omega)$ faible$*$. On en déduit alors que

$$h_n(\theta^\varepsilon)D\big(h_{2n}(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon\big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} h_n(\theta)D\big(h_{2n}(\theta)u\big) \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible,}$$

et, d'après le lemme 2.1, on a $h_n(\theta)D\big(h_{2n}(\theta)u\big) = h_n(\theta)Du$ p.p. dans Ω.
La régularité de $h_{2n}(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon$ et la définition de h_n entraînent que

$$h_n(\theta^\varepsilon)D(h_{2n}\big(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon\big) = h_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et, par suite, la convergence presque partout de Du^ε et $h_n(\theta^\varepsilon)$ nous donne :

$$h_n(\theta^\varepsilon)D\big(h_{2n}(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon\big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} h_n(\theta)w \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Finalement, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n(\theta)Du = h_n(\theta)w$ p.p. dans Ω. La fonction θ appartenant à $L^1(\Omega)$, on en déduit que $w = Du$ p.p. dans Ω et ainsi,

$$Du^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} Du \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{2.45}$$

<u>**Montrons que pour tout n, $L_n(\theta)u \in H_0^1(\Omega)$**</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après (2.33), on a $L_n(\theta)u \in H_0^1(\Omega)$, la fonction L_n n'étant pas à support compact, le calcul de $D\big[L_n(\theta)u\big]$ nécessite une justification. Au stade approché, $\varepsilon > 0$, on a $L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et $D\big[L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon\big] = L_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon + u^\varepsilon DL_n(\theta^\varepsilon)$ p.p. dans Ω. D'après le lemme 2.2, $L_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^N$ et converge presque partout vers $L_n(\theta)Du$, on en déduit que

$$L_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta)Du \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible.}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}}D\theta^\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mathbb{1}_{\{n<\theta<2n\}}D\theta \text{ p.p. dans } \{n<\theta<2n\},\\
\mathbb{1}_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}}D\theta^\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \text{ p.p. dans } \{\theta = n\} \cup \{\theta = 2n\},\\
\mathbb{1}_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}}D\theta^\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \text{ p.p. dans } \{\theta < n\} \cup \{\theta > 2n\},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$u^\varepsilon DL_n(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} uDL_n(\theta) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

En utilisant l'estimation sur $u^\varepsilon DT_K(\theta^\varepsilon)$ du lemme 2.2, on obtient

$$u^\varepsilon DL_n(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} uDL_n(\theta) \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible.}$$

Comme $u^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} uL_n(\theta)$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible, on obtient finalement que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $D\big[L_n(\theta)u\big] = L_n(\theta)Du + uDL_n(\theta)$ p.p. dans Ω. Pour tout $K > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que

$L_n(\theta)T_K(u) = L_n(\theta)T_K\big(L_{2n}(\theta)u\big)$, ce qui entraîne, d'après la propriété précédente, et au vu des régularités des termes,

$$\begin{aligned} D\big[L_n(\theta)T_K(u)\big] &= L_n(\theta)DT_K\big(L_{2n}(\theta)u\big) + T_K\big(L_{2n}(\theta)u\big)DL_n(\theta) \\ &= L_n(\theta)\mathbb{1}_{\{|L_{2n}(\theta)u|<K\}} \times \big(uDL_{2n}(\theta) + L_{2n}(\theta)Du\big) + T_K(u)DL_n(\theta) \\ &= L_n(\theta)\mathbb{1}_{\{|u|<K\}}Du + T_K(u)DL_n(\theta) \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

4ème étape : Convergence forte de $L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon$.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, d'après les régularités de u^ε et θ^ε, si $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et est à support compact, on a

$$\begin{aligned} &\lambda u^\varepsilon h(\theta^\varepsilon) - \operatorname{div}\big(h(\theta^\varepsilon)ADu^\varepsilon\big) + h'(\theta^\varepsilon)ADu^\varepsilon \cdot D\theta^\varepsilon \\ &\qquad + \operatorname{div}\big(h(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big) - h'(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon = gh(\theta^\varepsilon) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{aligned}$$

Dans cette équation, on peut remarquer que, mis à part $h'(\theta^\varepsilon)ADu^\varepsilon \cdot D\theta^\varepsilon$, tous les autres termes passent facilement à la limite grâce aux résultats des étapes antérieures. Pour pouvoir passer à la limite dans cette équation, nous allons démontrer un résultat de convergence forte concernant $L_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon$ dans $L^2(\Omega)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon$ converge fortement dans $(L^2(\Omega))^N$ vers $L_n^{1/2}(\theta)Du$ quand $\varepsilon \to 0$.*

De cette proposition on déduit immédiatement le corollaire :

Corollaire 2.4 *Pour toute fonction h continue et à support compact on a :*

$$h(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} h(\theta)Du \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort.}$$

Nous démontrerons la proposition grâce à deux lemmes. Le premier utilise à la fois l'équation vérifiée par u^ε et une propriété due à la structure de la deuxième équation et aux régularités de $(\theta^\varepsilon)^-$ et $\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<K\}}u^\varepsilon Du^\varepsilon$ pour $K > 0$.

Lemme 2.5 *Pour tout n, $m \in \mathbb{N}^*$, et $K > 0$, $L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)L_m^{1/2}(\theta)DT_K(u^\varepsilon)$ converge fortement dans $(L^2(\Omega))^N$ vers $L_n^{1/2}(\theta)L_m^{1/2}(\theta)DT_K(u)$ quand $\varepsilon \to 0$.*

Preuve du lemme 2.5.

Fixons $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout n tel que $n > 2m+1$, appliquons à l'équation vérifiée par u^ε, la fonction test $L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)\big(T_K(u^\varepsilon) - T_K(u)\big)$. On obtient

$$(\mathsf{A}_{\varepsilon,n}) \qquad \lambda\int_\Omega u^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)\big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$(\mathsf{B}_{\varepsilon,n}) \qquad +\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADu^\varepsilon\cdot\big(DT_K(u^\varepsilon)-DT_K(u)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$(\mathsf{C}_{\varepsilon,n}) \qquad +\int_\Omega \big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)L_n(\theta^\varepsilon)L'_m(\theta)\,ADu^\varepsilon\cdot D\theta\,\mathrm{d}x$$

$$(\mathsf{D}_{\varepsilon,n}) \qquad +\int_\Omega \big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)L_m(\theta)L'_n(\theta^\varepsilon)\,ADu^\varepsilon\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x$$

$$(\mathsf{E}_{\varepsilon,n}) \qquad -\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot\big(DT_K(u^\varepsilon)-DT_K(u)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$(\mathsf{F}_{\varepsilon,n}) \qquad -\int_\Omega \big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)L_n(\theta^\varepsilon)L'_m(\theta)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x$$

$$(\mathsf{G}_{\varepsilon,n}) \qquad -\int_\Omega \big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)L_m(\theta)L'_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x$$

$$(\mathsf{H}_{\varepsilon,n}) \qquad =\int_\Omega gL_n(\theta)L_m(\theta^\varepsilon)\big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Première étape : $\varepsilon \to 0$ puis $n \to +\infty$

Nous allons étudier le comportement de chaque terme de l'égalité ci-dessus quand $\varepsilon \to 0$, puis nous ferons tendre n vers $+\infty$.

• Étude de $\mathsf{H}_{\varepsilon,n}$.

D'après les résultats de convergence (2.30) et(2.32), on a :

$$T_K(u^\varepsilon)-T_K(u) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \text{ et dans } L^\infty \text{ faible}*,$$

$$L_n(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta) \quad \text{p.p. dans } \Omega \text{ et dans } L^\infty \text{ faible}*.$$

Le théorème de convergence dominée et le fait que $g \in L^2(\Omega)$ entraînent que

$$\mathsf{H}_{\varepsilon,n} = \int_\Omega gL_n(\theta)L_m(\theta^\varepsilon)\big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

• Étude de $\mathsf{G}_{\varepsilon,n}$.

La fonction L'_n étant à support compact, on en déduit que la suite $L'_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^N$. De plus par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il est clair que $T_K(u^\varepsilon)-T_K(\theta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ dans $L^2(\Omega)$ fort. Finalement on obtient que

$$\mathsf{G}_{\varepsilon,n} = -\int_\Omega \big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)L_m(\theta)L'_n(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

• Étude de $\mathsf{F}_{\varepsilon,n}$.

D'après la définition de L_n, on a $f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)L_n(\theta^\varepsilon) = \mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<0\}}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)+\mathbb{1}_{\{0\le\theta^\varepsilon\le 2n\}}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)L_n(\theta^\varepsilon)$ p.p. dans Ω, et par suite, le comportement de f sur $\mathbb{R}^-$ et l'estimation (2.22) entraînent que la suite $(f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)L_n(\theta^\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^N$. Comme $L'_m(\theta)D\theta \in (L^2(\Omega))^N$, et $T_K(u^\varepsilon)-T_K(u) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible$*$, on a

$$\mathsf{F}_{\varepsilon,n} = -\int_\Omega \big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)L_n(\theta^\varepsilon)L'_m(\theta)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

• Étude de $\mathsf{E}_{\varepsilon,n}$.

$$\mathsf{E}_{\varepsilon,n} = -\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot\big(DT_K(u^\varepsilon)-DT_K(u)\big)\,\mathrm{d}x$$

Puisque $n > 2m+1$, d'après la définition de Du et de L_n, on peut écrire que

$$\begin{aligned} &L_m(\theta)L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)\big(DT_K(u^\varepsilon)-DT_K(u)\big)\\ &\qquad = L_m(\theta)L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)\Big(DT_K\big[L_{2n}(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon\big]-DT_K\big[L_{2n}(\theta)u\big]\Big) \quad \text{p.p. dans } \Omega.\end{aligned}$$

Or d'après les propriétés de convergence, nous avons :

$$DT_K\big(L_{2n}(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon\big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} DT_K\big(L_{2n}(\theta)u\big) \quad \text{p.p. dans } \{|L_{2n}(\theta)u|<K\},$$

$$DT_K\big(L_{2n}(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon\big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{p.p. dans } \{|L_{2n}(\theta)u|=K\},$$

$$DT_K\big(L_{2n}(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon\big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{p.p. dans } \{|L_{2n}(\theta)u|>K\}.$$

Ceci implique que

$$L_m(\theta)L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)\big(DT_K(u^\varepsilon)-DT_K(u)\big)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0\quad\text{p.p. dans }\Omega,$$

et comme d'après les estimations, $L_m(\theta)L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)\big(DT_K(u^\varepsilon)-DT_K(u)\big)$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^N$, uniformément en ε, on obtient que

$$L_m(\theta)L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)\big(DT_K(u^\varepsilon)-DT_K(u)\big)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0\quad\text{dans }(L^2(\Omega))^N\text{ faible.}$$

Utilisons de nouveau le fait que $L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)=\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<0\}}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)+\mathbb{1}_{\{0\le\theta^\varepsilon\le 2n\}}f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)$ p.p. dans Ω. Le comportement de f sur $\mathbb{R}^-$ et l'estimation (2.19) sur $(\theta^\varepsilon)^-$ entraînent alors que $(L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $(L^4(\Omega))^N$, et par suite, de la convergence presque partout de θ^ε, on obtient, en particulier, que

$$L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}L_n^{1/2}(\theta)f(\theta)\quad\text{dans }(L^2(\Omega))^N\text{ fort.}$$

Et finalement, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathsf{E}_{\varepsilon,n}=0.$$

• Étude de $\mathsf{C}_{\varepsilon,n}$.

En utilisant de nouveau (2.26) et la convergence presque partout de $T_K(u^\varepsilon)$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne que

$$\mathsf{C}_{\varepsilon,n}=\int_\Omega\big(T_K(u^\varepsilon)-T_K(u)\big)L_n(\theta^\varepsilon)L_m'(\theta)\,ADu^\varepsilon\cdot D\theta\,\mathrm{d}x\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0.$$

• Étude de $\mathsf{A}_{\varepsilon,n}$.

De la même façon, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathsf{A}_{\varepsilon,n}=0.$$

• Étude de $\mathsf{B}_{\varepsilon,n}$.

En développant $\mathsf{B}_{\varepsilon,n}$, on obtient que

$$\mathsf{B}_{\varepsilon,n}=\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADT_K(u^\varepsilon)\cdot DT_K(u^\varepsilon)\,\mathrm{d}x-\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADu^\varepsilon\cdot DT_K(u)\,\mathrm{d}x,$$

et par suite, des résultats de convergence utilisés précédemment, on déduit que

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\mathsf{B}_{\varepsilon,n}=&\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADT_K(u^\varepsilon)\cdot DT_K(u^\varepsilon)\,\mathrm{d}x\\&-\int_\Omega L_n(\theta)L_m(\theta)ADT_K(u)\cdot DT_K(u)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

• Étude de $\mathsf{D}_{\varepsilon,n}$.

Dans $\mathsf{D}_{\varepsilon,n}$ intervient le produit de 2 termes qui convergent au mieux, à cette étape de la démonstration, faiblement dans $(L^2(\Omega))^N$. Ainsi, alors qu'il est clair que la limite presque partout du terme intégré est 0, les résultats démontrés précédemment ne permettent pas d'en conclure que $\mathsf{D}_{\varepsilon,n}$ tend vers 0 quand $\varepsilon\to 0$. Le comportement de $\mathsf{D}_{\varepsilon,n}$ est capital pour obtenir le résultat ; une étude plus fine de $\mathsf{D}_{\varepsilon,n}$ est nécessaire. Nous allons démontrer que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,|\mathsf{D}_{\varepsilon,n}|=0,\tag{2.46}$$

et que cette propriété suffit pour obtenir le lemme.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que la matrice A soit à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ nous donnent, pour tout $n > m$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$|\mathsf{D}_{\varepsilon,n}| \leq 2K\big\|A\big\|_{L^\infty}\left(\int_\Omega |L_n'(\theta^\varepsilon)| L_m(\theta)|Du^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |L_n'(\theta^\varepsilon)| L_m(\theta)|D\theta^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{2.47}$$

Si $n > 2m+1$, on a :

$$\int_\Omega |L_n'(\theta^\varepsilon)|\, L_m(\theta)\,|D\theta^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}} L_m(\theta)\,T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,|D\theta^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x, \tag{2.48}$$

$$\int_\Omega |L_n'(\theta^\varepsilon)|\, L_m(\theta)\,|Du^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}} L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,|Du^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x. \tag{2.49}$$

Pour contrôler les deux termes ci-dessus, nous allons utiliser l'équation vérifiée par θ^ε. La régularité $(\theta^\varepsilon)^- \in H_0^1(\Omega)$, permet de «renormaliser» l'équation vérifiée par θ^ε par la fonction $L_n(\theta^\varepsilon)$, c'est à dire :

$$\mu\theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon) - \operatorname{div}\big(L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\big) + L_n'(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon = \big(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big)\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Des régularités de $(\theta^\varepsilon)^-$ et de θ, la fonction $L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)$ appartient à $L^\infty(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ et de plus on a $D\big[L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\big] = L_m'(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)D\theta + L_m(\theta)\mathbb{1}_{\{0<\theta^\varepsilon-\theta<1\}}(D\theta^\varepsilon - D\theta)$ p.p. dans Ω. C'est une fonction test admissible dans l'équation précédente, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\mu\int_\Omega \theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x + \int_{\{0<\theta^\varepsilon-\theta<1\}} L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot(D\theta^\varepsilon-D\theta)\,\mathrm{d}x\\ + \int_\Omega L_m'(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x + \int_\Omega L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)L_n'(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x\\ = \int_\Omega\big(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big)\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mu\int_\Omega \theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega L_m'(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x\\ + \int_{\{0<\theta^\varepsilon-\theta<1\}} L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot(D\theta^\varepsilon-D\theta)\,\mathrm{d}x\\ + \int_\Omega f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega ADu^\varepsilon\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x\\ + \frac{1}{n}\int_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}} L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.50}$$

La coercivité de l'opérateur $\mathbf{a}$ et de la matrice A, implique que les deux termes du membre de droite de l'égalité précédente sont positifs. Le membre de gauche nous permet donc de contrôler les termes (2.48) et (2.49). À cet effet, montrons :

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega \theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{2.51}$$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_m'(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x = 0, \tag{2.52}$$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{2.53}$$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|\int_{\{0<\theta^\varepsilon-\theta<1\}} L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot(D\theta^\varepsilon-D\theta)\,\mathrm{d}x\right| \leq C_1(m), \tag{2.54}$$

où $C_1(m)$ est une constante indépendante de n.

♦ Démonstration de (2.51).

D'après la définition de L_n, l'estimation (2.19) et le comportement de f sur $\mathbb{R}^-$, on a $\theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon)$ bornée uniformément en ε dans $L^2(\Omega)$. De plus nous savons que

$$T_1^+(\theta^\varepsilon - \theta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{p.p. et dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible}*.$$

On obtient donc (2.51).

♦ Démonstration de (2.52).

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne que

$$L'_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon - \theta)D\theta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort},$$

et de plus d'après l'hypothèse (1.6) vérifiée par $\mathbf{a}$, les estimations (2.19) et (2.25) impliquent que

$$\int_\Omega L_n^2(\theta^\varepsilon)|\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)|^2\,\mathrm{d}x \le C_2\left(1 + \int_{\{\theta^\varepsilon<2n\}} |D\theta^\varepsilon|^2\right),$$

où C_2 est une constante indépendante de n et ε.
On déduit alors (2.52).

♦ Démonstration de (2.53).

D'après le comportement de f sur $\mathbb{R}^-$, on a $f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)L_n(\theta^\varepsilon)$ bornée dans $(L^4(\Omega))^N$, et de plus

$$f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)L_n(\theta^\varepsilon)T_1^+(\theta^\varepsilon - \theta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On obtient donc, en particulier, que

$$f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)L_n(\theta^\varepsilon)T_1^+(\theta^\varepsilon - \theta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort}.$$

D'après l'estimation (2.26), la suite $(L_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^N$. On conclut alors pour (2.53)

♦ Démonstration de (2.54).

En remarquant que l'on a

$$L_m(\theta) \times \mathbb{1}_{\{0<\theta^\varepsilon-\theta<1\}} \le \mathbb{1}_{\{\theta<2m\}} \times \mathbb{1}_{\{0<\theta^\varepsilon-\theta<1\}} \le \mathbb{1}_{\{\theta<2m\}} \times \mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<2m+1\}} \text{ p.p. dans } \Omega,$$

on obtient que

$$\left|\int_{\{0<\theta^\varepsilon-\theta<1\}} L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot(D\theta^\varepsilon - D\theta)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\le \int_\Omega \big|\mathbf{a}(x, DL_{2m+1}(\theta^\varepsilon))\big| \times \big(\big|DL_{2m+1}(\theta^\varepsilon)\big| + \big|DL_{2m}(\theta)\big|\big)\,\mathrm{d}x,$$

et d'après la propriété (1.6) vérifiée par $\mathbf{a}$, et les estimations (2.19) et (2.25), cette inégalité nous donne le résultat cherché.

D'après (2.54), l'égalité (2.50) et la coercivité de A et $\mathbf{a}$, on obtient que pour tout $n > 2m+1$,

(2.55) $$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_\Omega |Du^\varepsilon|^2\, L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon - \theta)\,\mathrm{d}x \le C_3(m),$$

(2.56) $$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \frac{1}{n} \int_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}} L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon - \theta)\,|D\theta^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x \le C_3(m),$$

où $C_3(m)$ est une constante indépendante de n.

Grâce à ces propriétés, nous pouvons désormais démontrer (2.46). En effet d'après (2.56), on a pour $n > 2m+1$,

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega |L_n'(\theta^\varepsilon)|\,L_m(\theta)\,|Du^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{n}\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega |Du^\varepsilon|^2\,L_{2n}(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)T_1^+(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{n}C_3(m).\end{aligned}$$

La propriété ci-dessus, (2.47), (2.48), (2.49) et (2.56) entraînent que pour tout $n > 2m+1$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,|\mathsf{D}_{\varepsilon,n}| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \times C_4(m),$$

où $C_4(m)$ est une constante indépendante de n (mais dépendante de m).
On en déduit alors que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\;\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,|\mathsf{D}_{\varepsilon,n}| = 0.$$

<u>Deuxième étape : cas où $n > 2m+1$</u>

Nous allons utiliser le résultat de l'étape précédente afin de démontrer le résultat du lemme dans le cas où $n > 2m+1$. Rappelons que $\mathsf{A}_{\varepsilon,n}+\mathsf{B}_{\varepsilon,n}+\mathsf{C}_{\varepsilon,n}+\mathsf{D}_{\varepsilon,n}+\mathsf{E}_{\varepsilon,n}+\mathsf{F}_{\varepsilon,n}+\mathsf{G}_{\varepsilon,n}=\mathsf{H}_{\varepsilon,n}$, ainsi l'étude de chaque terme de cette égalité entraîne dans un premier temps, en faisant tendre ε vers 0, que pour tout $n > 2m+1$,

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADT_K(u^\varepsilon)\cdot DT_K(u^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le &\int_\Omega L_n(\theta)L_m(\theta)ADT_K(u)\cdot DT_K(u)\,\mathrm{d}x\\ &+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,|\mathsf{D}_{\varepsilon,n}|.\end{aligned}$$

De (2.46) et du fait que pour $n > 2m+1$ on a $L_n \times L_m = L_m$, on en déduit alors que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\;\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADT_K(u^\varepsilon)\cdot DT_K(u^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega L_m(\theta)ADT_K(u)\cdot DT_K(u)\,\mathrm{d}x. \tag{2.57}$$

Or, il est clair que si $n < n'$, on a $L_n \le L_{n'}$, ce qui implique que la fonction qui à n associe $\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADT_K(u^\varepsilon)\cdot DT_K(u^\varepsilon)\,\mathrm{d}x$ est croissante. De (2.57), on en conclut que pour tout $n > 2m+1$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADT_K(u^\varepsilon)\cdot DT_K(u^\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega L_m(\theta)ADT_K(u)\cdot DT_K(u)\,\mathrm{d}x.$$

Nous savons de plus que pour tout $n > 2m+1$,

$$L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADT_K(u^\varepsilon)\cdot DT_K(u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_m(\theta)ADT_K(u)\cdot DT_K(u) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

par un résultat classique d'analyse fonctionnelle, on en déduit que pour tout $n > 2m+1$,

$$L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)ADT_K(u^\varepsilon)\cdot DT_K(u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_m(\theta)ADT_K(u)\cdot DT_K(u) \;\text{ dans } L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

La matrice A étant coercive à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, on a pour tout $n > 2m+1$:

$$L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)\big|DT_K(u^\varepsilon)\big|^2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_m(\theta)\big|DT_K(u)\big|^2 \;\text{ dans } L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

<u>Troisième étape : cas où n est quelconque</u>

Dans le cas général, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit

$$L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)L_m^{1/2}(\theta)DT_K(u^\varepsilon) = L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)L_{2m+2}^{1/2}(\theta^\varepsilon)L_m^{1/2}(\theta)DT_K(u^\varepsilon) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

En utilisant le fait que $L^{1/2}(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L^{1/2}(\theta)$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible$*$, on obtient que

$$L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)\big|DT_K(u^\varepsilon)\big|^2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta)L_m(\theta)\big|DT_K(u)\big|^2 \ \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

De plus sachant que

$$L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)L_m^{1/2}(\theta)DT_K(u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n^{1/2}(\theta)L_m^{1/2}(\theta)DT_K(u) \ \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible,}$$

on en déduit alors que, pour tout n, $m > 0$, on a

$$L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)L_m^{1/2}(\theta)DT_K(u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n^{1/2}(\theta)L_m^{1/2}(\theta)DT_K(u) \ \text{ dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort.}$$

■

Le fait d'utiliser, pour le lemme précédent, le produit $L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta)$ nous a donné un résultat partiel, mais utile, pour la proposition 2.2. Ce résultat nous dit que sur $\{\theta < m\}$ on a $L_n(\theta^\varepsilon)DT_K(u^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta)DT_K(u)$ fortement dans $L^2(\Omega)$. Il nous manque une information sur l'ensemble $\{\theta \geq m\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$L_n(\theta^\varepsilon) = L_n(\theta^\varepsilon)L_m(\theta) + L_n(\theta^\varepsilon)\big(1 - L_m(\theta)\big).$$

Si $m > 2n+1$, la définition des fonctions (L_n) implique que

$$L_n(\theta^\varepsilon)\big(1 - L_m(\theta)\big) \leq L_n(\theta^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon - \theta \leq -1\}},$$

et il est clair que $L_n(\theta^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon-\theta\leq -1\}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. Grâce à la structure de l'équation vérifiée par θ^ε, nous allons démontrer dans le lemme suivant que $L_n(\theta^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon-\theta\leq -1\}}|Du^\varepsilon|^2$ converge vers 0 fortement dans $L^1(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$. Ceci, ajouté au lemme 2.5, permettra d'aborder la démonstration de la proposition 2.2.

Lemme 2.6 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $L_n(\theta^\varepsilon)\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon-\theta\leq -1\}}|Du^\varepsilon|^2$ converge vers 0 fortement dans $L^1(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$.*

Preuve du lemme 2.6.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et remarquons que $\mathbb{1}_{\{r\leq -1\}} \leq T_1^-(r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$.

La régularité $(\theta^\varepsilon)^- \in H_0^1(\Omega)$ entraîne que

$$\mu\theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon) - \operatorname{div}\big(L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\big) + L_n'(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon$$
$$= \big(ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\big)\cdot Du^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Pour $K > 0$, utilisons, dans l'équation ci-dessus, la fonction test $T_1^-\big(T_K(\theta^\varepsilon) - T_K(\theta)\big) \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et, dans un premier temps, faisons tendre K vers $+\infty$. On obtient (en notant θ_K^ε pour $T_K(\theta^\varepsilon)$),

$$\mu\int_\Omega \theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon)T_1^-(\theta_K^\varepsilon - \theta_K)\,\mathrm{d}x - \int_{\{-1<\theta_K^\varepsilon-\theta_K<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot(D\theta_K^\varepsilon - D\theta_K)\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_\Omega L_n'(\theta^\varepsilon)T_1^-(\theta_K^\varepsilon - \theta_K)\ \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon)T_1^-(\theta_K^\varepsilon - \theta_K)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne, après développement,

$$\begin{aligned}(2.58)\quad \mu\int_\Omega \theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon)T_1^-(\theta^\varepsilon_K-\theta_K)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon)T_1^-(\theta^\varepsilon_K-\theta_K)\,\mathrm{d}x\\ -\int_{\{-1<\theta^\varepsilon_K-\theta_K<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta)\cdot(D\theta^\varepsilon_K-D\theta_K)\,\mathrm{d}x\\ =\frac{1}{n}\int_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}} T_1^-(\theta^\varepsilon_K-\theta_K)\ \mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x\\ +\int_{\{-1<\theta^\varepsilon_K-\theta_K<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\big(\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)-\mathbf{a}(x,D\theta)\big)\cdot(D\theta^\varepsilon_K-D\theta_K)\,\mathrm{d}x\\ +\int_\Omega ADu^\varepsilon\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon)T_1^-(\theta^\varepsilon_K-\theta_K)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

À $\varepsilon>0$ fixé on a, pour $K>2n+1$,

$$\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon\le 0,\,-1<\theta^\varepsilon_K-\theta_K<0\}}L_n(\theta^\varepsilon)=\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon\le 0,\,-1<\theta^\varepsilon_K-\theta_K<0\}}\mathbb{1}_{\{\theta<1\}}L_n(\theta^\varepsilon)\quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et,

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\{0<\theta^\varepsilon,\,-1<\theta^\varepsilon_K-\theta_K<0\}}L_n(\theta^\varepsilon)&=\mathbb{1}_{\{0<\theta^\varepsilon,\,-1<\theta^\varepsilon-\theta_K<0\}}L_n(\theta^\varepsilon)\\ &=\mathbb{1}_{\{0<\theta^\varepsilon,\,-1<\theta^\varepsilon-\theta_K<0\}}\mathbb{1}_{\{\theta<2n+1\}}L_n(\theta^\varepsilon)\quad \text{p.p. dans } \Omega.\end{aligned}$$

Ainsi d'après ce calcul on obtient, pour $K>2n+1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\{-1<\theta^\varepsilon_K-\theta_K<0\}}L_n(\theta^\varepsilon)\big|\mathbf{a}(x,D\theta)\cdot(D\theta^\varepsilon_K-D\theta_K)\big|\\ \le \mathbb{1}_{\{\theta<2n+1\}}\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<2n\}}\big|\mathbf{a}(x,D\theta)\big|\times\big(|D\theta^\varepsilon|+|D\theta|\big).\end{aligned}$$

Le terme de droite de l'inégalité précédente appartenant à $L^1(\Omega)$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous donne :

$$\begin{aligned}\lim_{K\to+\infty}\int_{\{-1<\theta^\varepsilon_K-\theta_K<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot(D\theta^\varepsilon_K-D\theta_K)\,\mathrm{d}x\\ =\int_{\{-1<\theta^\varepsilon-\theta<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot(D\theta^\varepsilon-D\theta)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

et de la même façon, on obtient que

$$\begin{aligned}\lim_{K\to+\infty}\int_{\{-1<\theta^\varepsilon_K-\theta_K<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\big(\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)-\mathbf{a}(x,D\theta)\big)\cdot(D\theta^\varepsilon_K-D\theta_K)\,\mathrm{d}x\\ =\int_{\{-1<\theta^\varepsilon-\theta<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\big(\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)-\mathbf{a}(x,D\theta)\big)\cdot(D\theta^\varepsilon-D\theta)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dans l'égalité (2.58), par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, les autres termes passent facilement à la limite et l'on obtient,

$$\begin{aligned}\mu\int_\Omega \theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon)T_1^-(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x+\int_\Omega f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon)T_1^-(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x\\ -\int_{\{-1<\theta^\varepsilon-\theta<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x,D\theta)\cdot(D\theta^\varepsilon-D\theta)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{\{n<\theta^\varepsilon<2n\}} T_1^-(\theta^\varepsilon-\theta)\ \mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x\\ +\int_{\{-1<\theta^\varepsilon-\theta<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\big(\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)-\mathbf{a}(x,D\theta)\big)\cdot(D\theta^\varepsilon-D\theta)\,\mathrm{d}x\\ +\int_\Omega ADu^\varepsilon\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon)T_1^-(\theta^\varepsilon-\theta)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La monotonie et la coercivité de l'opérateur $\mathbf{a}$, ainsi que la coercivité de la matrice A entraînent que, dans l'égalité précédente, les termes du membre de droite sont positifs. Ainsi, si l'on montre que le membre de gauche tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, par la coercivité de A, le lemme sera démontré.

Montrons que chaque terme du membre de gauche a pour limite 0 quand $\varepsilon \to 0$.
La décomposition suivante,

$$\theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon) = (\theta^\varepsilon)^- + T_{2n}^+(\theta^\varepsilon)L_n(\theta^\varepsilon) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et l'estimation (2.19) permettent d'affirmer que la suite $(\theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon))$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. De plus $T_1^-(\theta^\varepsilon - \theta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ p.p. dans Ω et on en déduit alors que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \theta^\varepsilon L_n(\theta^\varepsilon) T_1^-(\theta^\varepsilon - \theta)\,\mathrm{d}x = 0.$$

De la même façon, une décomposition analogue entraîne, d'après le comportement de f sur $\mathbb{R}^-$, que $L_n(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)$ est bornée dans $(L^4(\Omega))^N$, ce qui est suffisant pour montrer que

$$L_n(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) T_1^-(\theta^\varepsilon - \theta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort.}$$

La suite $L_n(\theta^\varepsilon) Du^\varepsilon$ étant bornée dans $(L^2(\Omega))^N$, on obtient que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot Du^\varepsilon\, L_n(\theta^\varepsilon) T_1^-(\theta^\varepsilon - \theta)\,\mathrm{d}x = 0.$$

D'après la définition de la fonction L_n, on a

$$\left|\mathbb{1}_{\{-1<\theta^\varepsilon-\theta<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)(D\theta^\varepsilon - D\theta)\right| \le L_n(\theta^\varepsilon)\left|D\theta^\varepsilon\right| + \mathbb{1}_{\{\theta<2n+1\}}\left|D\theta\right|.$$

Des estimations (2.19) et (2.25) et de la convergence presque partout de $D\theta^\varepsilon$ vers $D\theta$ quand $\varepsilon \to 0$, on déduit que

$$\mathbb{1}_{\{-1<\theta^\varepsilon-\theta<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)(D\theta^\varepsilon - D\theta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \;\text{ p.p. dans } \Omega \text{ et est bornée dans } (L^2(\Omega))^N.$$

L'inégalité $\mathbb{1}_{\{-1<\theta^\varepsilon-\theta<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\left|\mathbf{a}(x, D\theta)\right| \le \mathbb{1}_{\{\theta<2n+1\}}\left|\mathbf{a}(x, D\theta)\right|$, l'hypothèse (1.6) concernant l'opérateur $\mathbf{a}$ et la régularité de θ ($\theta^- \in H_0^1(\Omega)$ et $T_K(\theta) \in H_0^1(\Omega)$), impliquent que $\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<2n+1\}}|\,\mathbf{a}(x, D\theta)| \in L^2(\Omega)$. Par un argument classique qui utilise le théorème d'Égorov, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{-1<\theta^\varepsilon-\theta<0\}} L_n(\theta^\varepsilon)\,\mathbf{a}(x, D\theta)\cdot(D\theta^\varepsilon - D\theta)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ainsi le lemme est démontré. ■

Les lemmes 2.5 et 2.6 étant démontrés, nous allons montrer le résultat principal de cette étape (proposition 2.2), i.e. la convergence forte de $L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon) Du^\varepsilon$ vers $L_n^{1/2}(\theta) Du$ dans $(L^2(\Omega))^N$ quand $\varepsilon \to 0$.

Preuve de la proposition 2.2.

Soient $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, telle que h soit à support compact et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{supp} h \subset [-n, n]$.
Pour tout $K > 0$, on a

$$\begin{aligned} L_n(\theta^\varepsilon)\left|DT_K(u^\varepsilon)\right|^2 =& L_n(\theta^\varepsilon)\left|DT_K(u^\varepsilon)\right|^2 \mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon-\theta\le -1\}} \\ &+ L_n(\theta^\varepsilon)\left|DT_K(u^\varepsilon)\right|^2\left(1 - \mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon-\theta\le -1\}}\right) \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.6, on obtient que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} L_n(\theta^\varepsilon)\left|DT_K(u^\varepsilon)\right|^2 T_1^-(\theta^\varepsilon - \theta) = 0.$$

D'après la définition de L_n, on a

$$L_n(\theta^\varepsilon)\big(1-\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon-\theta\leq -1\}}\big)=L_n(\theta^\varepsilon)L_{2n+1}(\theta)\big(1-\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon-\theta\leq -1\}}\big),$$

ce qui nous donne, d'après le lemme 2.5,

$$L_n(\theta^\varepsilon)\big(1-\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon-\theta\leq -1\}}\big)\big|DT_K(u^\varepsilon)\big|^2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta)\big|DT_K(\theta)\big|^2 \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

De la décomposition de $L_n(\theta^\varepsilon)\big|DT_K(u^\varepsilon)\big|^2$, on en déduit que pour tout $K>0$,

$$L_n(\theta^\varepsilon)\big|DT_K(u^\varepsilon)\big|^2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta)\big|DT_K(u)\big|^2 \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort.} \tag{2.59}$$

Grâce à ce résultat, nous allons démontrer la proposition. En effet d'après les estimations (lemme 2.2), la suite $(u^\varepsilon\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<n\}}Du^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^N$. Soit $C>0$ tel que

$$\forall\varepsilon>0,\quad \int_{\{\theta^\varepsilon<2n\}}(u^\varepsilon)^2|Du^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x\leq C.$$

Soient $\omega>0$, $K>0$ tel que $\frac{C}{K^2}\leq\omega$. Pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)\big|Du^\varepsilon\big|^2\,\mathrm{d}x &\leq \int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)\big|DT_K(u^\varepsilon)\big|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\{|u^\varepsilon|\geq K\}}L_n(\theta^\varepsilon)\big|Du^\varepsilon\big|^2\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)\big|DT_K(u^\varepsilon)\big|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{K^2}\int_{\{|u^\varepsilon|\geq K\}\cap\{\theta^\varepsilon<n\}}(u^\varepsilon)^2\big|Du^\varepsilon\big|^2\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)\big|DT_K(u^\varepsilon)\big|^2\,\mathrm{d}x+\omega.\end{aligned}$$

Ceci entraîne d'après (2.59)

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)\big|Du^\varepsilon\big|^2\,\mathrm{d}x\leq\int_\Omega L_n(\theta)\big|DT_K(u)\big|^2\,\mathrm{d}x+\omega\leq\int_\Omega L_n(\theta)\big|Du\big|^2\,\mathrm{d}x+\omega.$$

Donc pour tout $\omega>0$, on a

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)\big|Du^\varepsilon\big|^2\,\mathrm{d}x\leq\int_\Omega L_n(\theta)\big|Du\big|^2\,\mathrm{d}x+\omega,$$

ce qui implique

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)\big|Du^\varepsilon\big|^2\,\mathrm{d}x\leq\int_\Omega L_n(\theta)\big|Du\big|^2\,\mathrm{d}x.$$

Or d'après les résultats de convergence et le lemme de Fatou, il est clair que

$$\int_\Omega L_n(\theta)\big|Du\big|^2\,\mathrm{d}x\leq\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)\big|Du^\varepsilon\big|^2\,\mathrm{d}x.$$

On obtient donc que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega L_n(\theta^\varepsilon)\big|Du^\varepsilon\big|^2\,\mathrm{d}x=\int_\Omega L_n(\theta)\big|Du\big|^2\,\mathrm{d}x,$$

et comme $L_n^{1/2}(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n^{1/2}(\theta)Du$ p.p. dans Ω, on en déduit

$$L_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta)Du \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort.}$$

∎

5ème étape : Démonstration du théorème 2.1.

Les régularités (2.11), (2.12), (2.14), (2.15) et (2.13) de la définition 2.2 ont été démontrées dans les étapes antérieures.

Montrons le point (2.16) de la définition 2.2.

Soient $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\operatorname{supp} h \subset [-n, n]$. Au stade approché $\varepsilon > 0$, appliquons la fonction test $\varphi h(\theta^\varepsilon)$ à l'équation vérifiée par u^ε, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega u^\varepsilon h(\theta^\varepsilon)\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega h(\theta^\varepsilon) ADu^\varepsilon \cdot D\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi h'(\theta^\varepsilon) ADu^\varepsilon \cdot D\theta^\varepsilon \,\mathrm{d}x \\ - \int_\Omega h(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \cdot D\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi h'(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \cdot D\theta^\varepsilon \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g h(\theta^\varepsilon)\varphi \,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.60}$$

dans laquelle on désire passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$. Quitte à écrire que $h'(\theta^\varepsilon)ADu^\varepsilon \cdot D\theta^\varepsilon = h_n(\theta^\varepsilon)ADu^\varepsilon \cdot Dh(\theta^\varepsilon)$, le corollaire 2.4 et la convergence faible dans $H_0^1(\Omega)$, pour tout $K > 0$, de $T_K(\theta^\varepsilon)$ vers $T_K(\theta)$ quand $\varepsilon \to 0$ entraînent que

$$h'(\theta^\varepsilon)ADu^\varepsilon \cdot D\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} h'(\theta)ADu \cdot D\theta \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort..}$$

De la même façon, on obtient que

$$h'(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \cdot D\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} h'(\theta) f(\theta) \cdot D\theta \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

D'après les étapes antérieures et le corollaire 2.4, on a

$$\begin{aligned} u^\varepsilon h(\theta^\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \to 0} uh(\theta) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort,} \\ h(\theta^\varepsilon) Du^\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon \to 0} h(\theta) Du \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort,} \\ h'(\theta^\varepsilon) D\theta^\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon \to 0} h'(\theta) D\theta \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ faible,} \\ h(\theta^\varepsilon) f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \to 0} h(\theta) f(\theta) \quad \text{p.p. dans } \Omega \text{ et dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible}*. \end{aligned}$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, tous les termes de (2.60) passent à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et donc, pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à support compact et tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}\lambda \int_\Omega uh(\theta)\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega h(\theta) ADu \cdot D\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi h'(\theta) ADu \cdot D\theta \,\mathrm{d}x \\ - \int_\Omega h(\theta) f(\theta) \cdot D\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi h'(\theta) f(\theta) \cdot D\theta \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g h(\theta)\varphi \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Montrons le point (2.17) de la définition 2.2.

Soient $\widetilde{T}_K$ une fonction croissante, appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, telle que $\widetilde{T}_K(0) = 0$ et $\operatorname{supp} \widetilde{T}'_K \subset [-K, K]$, et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. En procédant comme dans la première étape (pour la fonction test $T_K(\theta^\varepsilon - \varphi)$), on a l'égalité suivante pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu \int_\Omega \theta^\varepsilon \widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon - \varphi) \,\mathrm{d}x \tag{A_ε}$$

$$+ \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta^\varepsilon) \cdot D\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon - \varphi) \,\mathrm{d}x \tag{B_ε}$$

$$+\lambda \int_\Omega (u^\varepsilon)^2 \widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon - \varphi) \,\mathrm{d}x \tag{C_ε}$$

$$= \int_\Omega g u^\varepsilon \widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon - \varphi) \,\mathrm{d}x \tag{D_ε}$$

$$- \int_\Omega u^\varepsilon (ADu^\varepsilon - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)) \cdot D\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon - \varphi) \,\mathrm{d}x. \tag{E_ε}$$

Étudions chaque termes de l'inégalité précédente.

• Étude de A_ε.

Par le lemme de Fatou, comme $(\theta^\varepsilon - \varphi) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} (\theta-\varphi)$ p.p. dans Ω et $r\widetilde{T}_K(r) \geq 0$, on a,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\theta-\varphi)\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x &\leq \varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (\theta^\varepsilon-\varphi)\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\,\mathrm{d}x\\ &\leq \varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \theta^\varepsilon\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\mu\int_\Omega \theta\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0}\mathsf{A}_\varepsilon.$$

• Étude de B_ε.

On peut écrire B_ε sous la forme

$$\int_\Omega \widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \theta$ et $D\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} D\theta$ p.p. dans Ω, et $\widetilde{T}'_K \geq 0$, la coercivité de l'opérateur $\mathbf{a}$, la continuité de $\widetilde{T}'_K$ et le lemme de Fatou entraînent que

$$\int_\Omega \widetilde{T}'_K(\theta-\varphi)\,\mathbf{a}(x,D\theta)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\theta^\varepsilon\,\mathrm{d}x.$$

Sachant que

$$\widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \widetilde{T}'_K(\theta-\varphi)\,\mathbf{a}(x,D\theta) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et

$$\widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon) \text{ est bornée dans } (L^2(\Omega))^N,$$

on obtient donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\,\mathbf{a}(x,D\theta^\varepsilon)\cdot D\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{T}'_K(\theta-\varphi)\,\mathbf{a}(x,D\theta)\cdot D\varphi\,\mathrm{d}x.$$

On a alors

$$\int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta)\cdot D\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0}\mathsf{B}_\varepsilon.$$

• Étude de C_ε.

Décomposons C_ε de la façon suivante ;

$$-\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\big(\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\big)^-\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (u^\varepsilon)^2\big(\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\big)^+\,\mathrm{d}x. \tag{2.61}$$

Comme $u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u$ et $\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \theta$ p.p. dans Ω, on en déduit

$$\int_\Omega u^2\big(\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\big)^+\,\mathrm{d}x \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega (u^\varepsilon)^2\big(\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\big)^+\,\mathrm{d}x. \tag{2.62}$$

Pour le second terme de (2.61), nous avons d'une part, pour $n > \|\varphi\|_{L^\infty}$

$$(u^\varepsilon)^2\big(\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\big)^- = (u^\varepsilon)^2\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon<\varphi\}} = L_n(\theta^\varepsilon)(u^\varepsilon)^2\big(\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\big)^- \text{ p.p.}$$

D'autre part, nous avons $L_n(\theta^\varepsilon)u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L_n(\theta)u$ dans $L^2(\Omega)$ fort. On en déduit donc que

$$(u^\varepsilon)^2\big(\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi)\big)^- \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u^2\big(\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\big)^- \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

On en déduit alors facilement de la décomposition (2.61) et de (2.62) que

$$\int_\Omega u^2\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x \le \varliminf_{\varepsilon\to 0} \mathsf{C}_\varepsilon$$

• Étude de D_ε.

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, comme $g\in L^2(\Omega)$, on a

$$g\widetilde{T}_K(\theta^\varepsilon-\varphi) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} g\widetilde{T}_K(\theta-\varphi) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

De plus $u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u$ dans $L^2(\Omega)$ faible. On obtient donc que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{D}_\varepsilon = \int_\Omega gu\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x.$$

• Étude de E_ε.

Développons tout d'abord E_ε,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\varepsilon = &-\int_\Omega \widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)u^\varepsilon ADu^\varepsilon\cdot(D\theta^\varepsilon-D\varphi)\,\mathrm{d}x\\ &+\int_\Omega \widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)u^\varepsilon f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\cdot(D\theta^\varepsilon-D\varphi)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Soit $n > K+\|\varphi\|_{L^\infty}$, d'après la définition de $\widetilde{T}_K$, on a $\widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi) = h_n(\theta^\varepsilon)\widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)$ p.p. dans Ω. On obtient donc, d'une part, d'après le corollaire 2.4,

$$h_n(\theta^\varepsilon)Du^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} h_n(\theta)Du \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort,}$$

et d'autre part, d'après les estimations et convergences,

$$\begin{gathered}\widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)u^\varepsilon D\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \widetilde{T}'_K(\theta-\varphi)uD\theta \quad \text{p.p. dans } \Omega,\\ \widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)u^\varepsilon D\theta^\varepsilon \text{ est bornée dans } (L^2(\Omega))^N,\\ \widetilde{T}'_K(\theta^\varepsilon-\varphi)f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \widetilde{T}'_K(\theta-\varphi)f(\theta) \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort.}\end{gathered}$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathsf{E}_\varepsilon = -\int_\Omega \widetilde{T}'_K(\theta-\varphi)u(ADu-f(\theta))\cdot(D\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\mathsf{A}_\varepsilon+\mathsf{B}_\varepsilon+\mathsf{C}_\varepsilon=\mathsf{D}_\varepsilon+\mathsf{E}_\varepsilon$, l'étude de chaque terme implique

$$\begin{aligned}\mu\int_\Omega \theta\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta)\cdot D\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega (u)^2\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x\\ \le \int_\Omega gu\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u(ADu-f(\theta))\cdot D\widetilde{T}_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.64}$$

Nous avons démontré (2.17) pour une classe de fonctions plus régulières que les fonctions troncatures T_K. Dans le cas général, soit $K>0$ et considérons pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, définie par $S_n(0)=0$ et

$$S'(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r|\ge K,\\ 0\le S'(r)\le 1 & \text{si } K-\frac{1}{n}\le |r|\le K,\\ 1 & \text{si } |r|\le K-\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

La suite S_n est une approximation de la fonction T_K ; $S_n \xrightarrow{n\to+\infty} T_K$ uniformément et $S_n' \xrightarrow{n\to+\infty} T_K'$ p.p. dans $\mathbb{R}$. L'inégalité (2.64) s'applique pour S_n ($\mathcal{C}^1$ et croissante). De plus on a

$$\begin{gathered}
S_n(\theta-\varphi) \xrightarrow{n\to+\infty} T_K(\theta-\varphi) \quad \text{p.p. et dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible}*,\\
S_n'(\theta-\varphi)(D\theta-D\varphi) \xrightarrow{n\to+\infty} T_K'(\theta-\varphi)(D\theta-D\varphi) \quad \text{p.p. dans } \Omega,\\
\left|S_n'(\theta-\varphi)(D\theta-D\varphi)\right| \le T_K'(\theta-\varphi)|D\theta-D\varphi|,\\
1\!\!1_{\{|\theta-\varphi|<K\}} uDu \in (L^2(\Omega))^N.
\end{gathered}$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne donc que tous les termes de l'inégalité (2.64) dans laquelle S_n remplace $\widetilde{T}_K$, passent à la limite quand $n \to +\infty$.
Donc finalement pour tout $K>0$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\mu \int_\Omega \theta T_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x,D\theta)\cdot DT_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega (u)^2 T_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x&\\
\le \int_\Omega g u T_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u(ADu - f(\theta))\cdot DT_K(\theta-\varphi)\,\mathrm{d}x.&
\end{aligned}$$

Le théorème 2.1 est démontré dans le cas où la fonction f vérifie l'hypothèse (2.6).

Dans le cas où f vérifie l'hypothèse (2.7), on définie la fonction $\widetilde{f}$ par

$$\widetilde{f}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \le r_0,\\ f(r) & \text{si } r_0 \le r.\end{cases}$$

Pour ε suffisamment petit, comme $\widetilde{f}\circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}(r_0)=0$, d'après le théorème 1.2, il existe au moins une solution $(u^\varepsilon,\theta^\varepsilon)$ du problème approché S1ε dans lequel la fonction $\widetilde{f}\circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$ remplace la fonction f^ε, vérifiant la condition supplémentaire $\theta^\varepsilon \ge r_0$. La fonction $\widetilde{f}$ vérifie l'hypothèse (2.6), et donc d'après ce qui précède la suite $(u^\varepsilon,\theta^\varepsilon)$ converge (à une sous suite près) vers (u,θ) une solution du système S2 (dans lequel $\widetilde{f}$ remplace f) au sens de la définition 2.2. Comme $\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \theta$ p.p. dans Ω et $\theta^\varepsilon \ge r_0$, on en déduit alors que $\theta \ge r_0$ p.p. dans Ω. On en déduit alors que $f(\theta)=\widetilde{f}(\theta)$ p.p. dans Ω, et donc, que (u,θ) est solution du système S2 au sens de la définition 2.2 vérifiant de plus la condition $\theta \ge r_0$ p.p. dans Ω.

Sous l'hypothèse (2.6) ou (2.7) le théorème 2.1 est démontré. ■

2.4 Une condition suffisante pour qu'une solution de S2 soit solution de S1

Dans la démonstration du théorème 2.1, nous avons montré, entre autres, que si f est bornée alors toute solution faible-renormalisée de S1, au sens de la définition 1.3, est solution de S2 au sens de la définition 2.2 (voir la fin de 1ère étape). En adaptant la première étape de la démonstration de ce théorème, on peut montrer que si la fonction continue f vérifie la condition (2.6) sur $\mathbb{R}^-$, alors toute solution de S1 au sens de la définition 1.3 (ce qui implique en particulier que $f(\theta)\in L^2(\Omega)$), est une solution renormalisée-entropique de S2 au sens de la définition 2.2.

Nous allons voir ici une réciproque : étant donné une solution renormalisée-entropique (u,θ) du système S2 au sens de la définition 2.2, si $f(\theta)\in (L^2(\Omega))^N$ le théorème suivant montre que (u,θ) est solution faible-renormalisée du système S1 au sens de la définition 1.3.

Théorème 2.3 *On suppose vérifiées les hypothèses (1.1)–(1.7) et que la fonction continue f vérifie (2.6) ou (2.7). Soit (u,θ) une solution du système S2 au sens de la définition 2.2, telle que, sous l'hypothèse (2.7), $\theta \ge r_0$ p.p. dans Ω. Si $f(\theta)\in (L^2(\Omega))^N$, alors (u,θ) est une solution du système S1 au sens de la définition 1.3.*

Preuve du théorème 2.3.

Nous commencerons par le cas où f vérifie la condition (2.6), condition qui assure, d'après le théorème 2.1, l'existence d'une solution (u,θ) de S2 au sens de la définition 2.2.

Montrons que $u \in H_0^1(\Omega)$

Nous commencerons par démontrer que $Du \in (L^2(\Omega))^N$. Nous utiliserons les régularités $f(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$, (2.11), (2.12) et (2.14) ainsi qu'une combinaison linéaire de l'inégalité (2.17) et de l'équation (2.16) afin de montrer que, pour la formulation renormalisée-entropique du système S2, le système S2 conserve une inégalité semblable à l'égalité (1.40) pour le système S1.

Soit $K > 0$, et pour tout $n > K$, considérons la fonction $\psi_{n,K}$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ par morceaux et à support compact, qui est définie dans la première étape de la démonstration du théorème 2.1. D'après la définition 2.2, on a

$$\begin{aligned}\lambda u\psi_{n,K}(\theta) - \operatorname{div}\big(\psi_{n,K}(\theta)ADu\big) + \psi'_{n,K}(\theta)ADu\cdot D\theta&\\ + \operatorname{div}\big(\psi_{n,K}(\theta)f(\theta)\big) - \psi'_{n,K}(\theta)f(\theta)\cdot D\theta &= g\psi_{n,K}(\theta) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)\end{aligned}$$

Pour $m > 2n$ et $K' > 0$, appliquons à l'équation précédente, la fonction test $T_{K'}\big(h_m(\theta)u\big) \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega u\psi_{n,K}(\theta)T_{K'}\big(h_m(\theta)u\big)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \psi_{n,K}(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot DT_{K'}\big(h_m(\theta)u\big)\,\mathrm{d}x&\\ + \int_\Omega T_{K'}\big(h_m(\theta)u\big)\psi'_{n,K}(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega g\psi_{n,K}(\theta)T_{K'}\big(h_m(\theta)u\big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1, on a $DT_{K'}\big(h_m(\theta)u\big) = \mathbb{1}_{\{|h_m(\theta)u|<K'\}}\big(h_m(\theta)Du + uh'(\theta)D\theta\big)$, et le choix $m > n$ implique que

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega u\psi_{n,K}(\theta)T_{K'}(u)\,\mathrm{d}x + \int_{\{|u|<K'\}} \psi_{n,K}(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot Du\,\mathrm{d}x&\\ + \int_\Omega T_{K'}(u)\psi'_{n,K}(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega g\psi_{n,K}(\theta)T_{K'}(u)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Les régularités $u \in L^2(\Omega)$, $uDu\mathbb{1}_{\{\theta<K\}} \in (L^2(\Omega))^N$ et $uDT_{2n}(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$, permettent de passer à la limite quand $K' \to +\infty$, et d'obtenir

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega u^2\psi_{n,K}(\theta)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \psi_{n,K}(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot Du\,\mathrm{d}x&\\ + \int_\Omega u\psi'_{n,K}(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega gu\psi_{n,K}(\theta)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.65}$$

Nous allons passer à la limite en n dans l'égalité ci-dessus. Rappelons tout d'abord que $\beta_K = \frac{K-T_K}{2K}$ et,

$$\begin{aligned}\psi_{n,K} &\xrightarrow{n\to+\infty} \beta_K \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}) \text{ faible}*,\\ \psi'_{n,K}(r) &= \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\{-2n<r<n\}} + \beta'(r) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc d'après la définition de $\psi_{n,K}$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\psi'_{n,K}(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x =& \frac{1}{n}\int_{\{-2n<\theta<-n\}} u\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x\\ &+ \int_\Omega \beta'_K(\theta)u\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pour $n > r_1$, $\mathbb{1}_{\{-2n<\theta<-n\}}|f(\theta)| \leq C_1\sqrt{n}$, où C_1 est une constante indépendante de n, ce qui nous donne la majoration, pour tout $n > |r_1|$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left|\int_{\{-2n<\theta<-n\}} u\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{n}\big\|A\big\|_{L^\infty(\Omega)}\big\|uDu\mathbb{1}_{\{\theta<0\}}\big\| \times \big\|\theta^-\big\|_{H_0^1(\Omega)} \\ + \frac{C_1}{\sqrt{n}}\big\|u\big\|_{L^2(\Omega)} \times \big\|\theta^-\big\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

qui entraîne d'après les régularités (2.14) et (2.15)

$$\int_\Omega u\psi'_{n,K}\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to+\infty} \int_\Omega \beta'_K(\theta)u\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x.$$

De la même façon, comme $u \in L^1(\Omega)$, $\mathbb{1}_{\{\theta<K\}}Du \in (L^2(\Omega))^N$, et $f(\theta) \in L^2(\Omega)$, on a

$$\begin{gathered}\int_\Omega u^2\psi_{n,K}(\theta)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to+\infty} \int_\Omega u^2\beta_K(\theta)\,\mathrm{d}x, \\ \int_\Omega \psi_{n,K}(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot Du\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to+\infty} \int_\Omega \beta_K(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot Du\,\mathrm{d}x, \\ \int_\Omega gu\psi_{n,K}(\theta)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to+\infty} \int_\Omega gu\beta_K(\theta)\,\mathrm{d}x,\end{gathered}$$

ce qui nous donne au total,

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega u^2\beta_K(\theta)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \beta_K(\theta)\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot Du\,\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega \beta'_K(\theta)u\big(ADu - f(\theta)\big)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x = \int_\Omega gu\beta_K(\theta)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Utilisons maintenant l'inégalité du type entropique (2.17) de la définition 2.2, prenons $\varphi = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\mu\int_\Omega \theta T_K(\theta)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta)\cdot DT_K(\theta)\,\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega u^2T_K(\theta)\,\mathrm{d}x \\ \leq \int_\Omega guT_K(\theta)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u(ADu - f(\theta))\cdot DT_K(\theta)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Multiplions (2.66) par $2K$ et additionnons le résultat à l'inégalité précédente, on obtient après simplification et transformation,

$$\begin{aligned}\mu\int_\Omega \theta T_K(\theta)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta)\cdot DT_K(\theta)\,\mathrm{d}x + \lambda K\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega A\big(Du - \frac{1}{2}A^{-1}f(\theta)\big)\cdot\big(Du - \frac{1}{2}A^{-1}f(\theta)\big)\big(K - T_K(\theta)\big)\,\mathrm{d}x \\ \leq \frac{1}{4}\int_\Omega A^{-1}f(\theta)\cdot f(\theta)\big(K - T_K(\theta)\big)\,\mathrm{d}x + K\int_\Omega gu\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La coercivité de l'opérateur $\mathbf{a}$ et l'hypothèse $f(\theta) \in L^2(\Omega)$, entraînent que, pour tout $K > 0$,

$$\int_\Omega \big|DT_K(\theta)\big|^2\,\mathrm{d}x \leq C_2 \times K, \tag{2.67}$$

où C_2 est une constante indépendante de K.

En utilisant de nouveau l'inégalité (2.67), on a, pour tout $K > 0$,

$$\int_\Omega A\big(Du - \frac{1}{2}A^{-1}f(\theta)\big) \cdot \big(Du - \frac{1}{2}A^{-1}f(\theta)\big)\big(K - T_K(\theta)\big)\,\mathrm{d}x \\ \leq \frac{1}{4}\int_\Omega A^{-1}f(\theta)\cdot f(\theta)\big(K - T_K(\theta)\big)\,\mathrm{d}x + K\int_\Omega gu\,\mathrm{d}x,$$

ce qui nous donne, après simplification et utilisation de l'inégalité de Young,

$$\int_\Omega \big|Du\big|^2\big(K - T_K(\theta)\big)\,\mathrm{d}x \leq C_3\left(\int_\Omega \big|f(\theta)\big|^2\big(K - T_K(\theta)\big)\,\mathrm{d}x + K\big\|g\big\|_{L^2(\Omega)} \times \big\|u\big\|_{L^2(\Omega)}\right), \tag{2.68}$$

où C_3 est une constante indépendante de K.

En divisant par K l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \big|Du\big|^2 \frac{K - T_K(\theta)}{K}\,\mathrm{d}x &\leq C_3\left(\int_\Omega \big|f(\theta)\big|^2 \frac{K - T_K(\theta)}{K}\,\mathrm{d}x + \big\|g\big\|_{L^2(\Omega)} \times \big\|u\big\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C_3\left(2\big\|f(\theta)\big\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \big\|g\big\|_{L^2(\Omega)} \times \big\|u\big\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C_4, \end{aligned}$$

où C_4 est une constante indépendante de K.
Comme $\dfrac{K - T_K(\theta)}{K} \xrightarrow{K\to+\infty} 1$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible$*$, on en déduit que

$$\int_\Omega \big|Du\big|^2\,\mathrm{d}x \leq C_5, \tag{2.69}$$

où $C_5 > 0$.

Cette estimation va nous permettre de montrer que $u \in H_0^1(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $uh_n(\theta)$, d'après la définition 2.2 on a $uh_n(\theta) \in H_0^1(\Omega)$ et d'après le lemme 2.1,

$$D\big[uh_n(\theta)\big] = h_n(\theta)Du + h_n'(\theta)uD\theta \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

D'après l'inégalité (2.67), on a

$$\frac{1}{n}\int_{\{n<|\theta|<2n\}} \big|D\theta\big|^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\int_\Omega \big|DT_{2n}(\theta)\big|^2\,\mathrm{d}x \leq C_6,$$

où C_6 est une constante indépendante de n. On obtient donc que

$$\frac{1}{n}\mathbb{1}_{\{n<|\theta|<2n\}}D\theta \xrightarrow{n\to 0} 0 \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort},$$

et, comme $u \in L^2(\Omega)$,

$$uh_n'(\theta)D\theta \xrightarrow{n\to 0} 0 \quad \text{dans } (L^1(\Omega))^N \text{ fort}.$$

Comme $Du \in (L^2(\Omega))^N$, on en déduit que

$$D\big[uh_n(\theta)\big] \xrightarrow{n\to 0} Du \quad \text{dans } (L^1(\Omega))^N \text{ fort},$$

ce qui implique $(uh_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $W_0^{1,1}(\Omega)$ et que le gradient de u, définie par la régularité $W_0^{1,1}(\Omega)$, coïncide avec Du défini par le lemme 2.1. Par suite, comme $Du \in (L^2(\Omega))^N$, on obtient que

$$u \in H_0^1(\Omega).$$

Montrons que u vérifie l'équation (1.15)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a, d'après (2.16) de la définition 2.2,

$$\begin{aligned}(2.70)\quad \lambda u h_n(\theta) - \operatorname{div}\big(h_n(\theta) ADu\big) + h_n'(\theta) ADu \cdot D\theta \\ + \operatorname{div}\big(h_n(\theta) f(\theta)\big) - h_n'(\theta) f(\theta) \cdot D\theta = g h_n(\theta) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).\end{aligned}$$

D'après (2.69) et l'hypothèse $f(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$, on a

$$h_n(\theta) Du \xrightarrow{n \to +\infty} Du \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort},$$
$$h_n(\theta) f(\theta) \xrightarrow{n \to +\infty} f(\theta) \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort},$$

et, comme $u \in L^2(\Omega)$,

$$h_n(\theta) u \xrightarrow{n \to +\infty} u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \int_\Omega ADu \cdot D\theta h_n'(\theta) \,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{2\|A\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{n}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \left(\frac{1}{2n} \int_\Omega \big|DT_{2n}(\theta)\big|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}$$
$$\left| \int_\Omega f(\theta) \cdot D\theta h_n'(\theta) \,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \big\|f(\theta)\big\|_{(L^2(\Omega))^N} \left(\frac{1}{2n} \int_\Omega \big|DT_{2n}(\theta)\big|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

L'inégalité (2.67), les régularités de u et $f(\theta)$ permettent d'en déduire que

$$ADu \cdot D\theta h_n'(\theta) \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \;\; \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort}$$
$$f(\theta) \cdot D\theta h_n'(\theta) \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \;\; \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort},$$

et donc que

$$(2.71)\qquad \lambda u - \operatorname{div}\big(ADu - f(\theta)\big) = g \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Montrons que (u, θ) vérifie (1.16) et (1.17)

Il nous reste à montrer les points (1.16) et (1.17) de la définition 1.3. Commençons par montrer que, pour tout $K > 0$, $uT_K(\theta) \in H_0^1(\Omega)$. Pour tout $K' > 0$, on a $T_K(\theta) T_{K'}(u) \in H_0^1(\Omega)$ et de plus

$$D\big[T_K(\theta) T_{K'}(u)\big] = T_K(\theta) DT_{K'}(u) + T_{K'}(u) DT_K(\theta) \;\; \text{p.p. dans } \Omega.$$

La régularité $u \in H_0^1(\Omega)$ entraîne que

$$T_K(\theta) DT_{K'}(u) \xrightarrow{K' \to +\infty} T_K(\theta) Du \;\; \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort},$$

et, comme $uDT_K(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$, on a aussi

$$T_{K'}(u) DT_K(\theta) \xrightarrow{K' \to +\infty} uDT_K(\theta) \;\; \text{dans } (L^2(\Omega))^N \text{ fort}.$$

Donc la suite $\big(T_{K'}(u) T_K(\theta)\big)_{K' > 0}$ est de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$, et on obtient

$$D\big[uT_K(\theta)\big] = T_K(\theta) Du + uDT_K(\theta) \;\; \text{p.p. dans } (L^2(\Omega))^N.$$

Soient $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et $K > 0$. En écrivant, pour $K' > K + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$, que $T_K(\theta - \varphi) = T_K\big(T_{K'}(\theta) - \varphi\big)$ p.p. dans Ω, on obtient, d'après la propriété précédente, que $uT_K(\theta - \varphi) \in H_0^1(\Omega)$, nous pouvons donc appliquer cette fonction test à l'équation (2.71) et obtenir,

$$\begin{aligned}(2.72)\quad \lambda \int_\Omega u^2 T_K(\theta - \varphi) \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\big(ADu - f(\theta)\big) \cdot DT_K(\theta - \varphi) \,\mathrm{d}x \\ \int_\Omega T_K(\theta - \varphi)\big(ADu - f(\theta)\big) \cdot Du \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g u T_K(\theta - \varphi) \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

et d'après (2.17) de la définition 2.2,

$$\mu \int_\Omega \theta T_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta) \cdot DT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega u^2 T_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_\Omega g u T_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u\big(ADu - f(\theta)\big) \cdot DT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x.$$

Sommons l'inégalité ci-dessus et (2.72), après simplification on obtient,

$$\mu \int_\Omega \theta T_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{a}(x, D\theta) \cdot DT_K(\theta - \varphi)\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_\Omega T_K(\theta - \varphi)\big(ADu - f(\theta)\big) \cdot Du\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\big(ADu - f(\theta)\big) \cdot Du \in L^1(\Omega)$, on en déduit que θ est solution entropique du problème

$$\begin{cases} \mu\theta - \mathrm{div}(\mathbf{a}(x, D\theta)) = \big(ADu - f(\theta)\big) \cdot Du & \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous sommes dans le cas où solution entropique et solution renormalisée coïncident, donc θ est solution renormalisée du problème ci-dessus, ce qui achève la démonstration du théorème.

Dans le cas où la fonction continue f vérifie la condition (2.7), soit (u, θ) une solution de S2, au sens de la définition 2.2, telle que $\theta \geq r_0$ p.p. dans Ω. Définissons $\widetilde{f}$ par

$$\widetilde{f}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq r_0 \\ f(r) & \text{si } r > r_0 \end{cases}$$

Comme $\theta \geq r_0$ p.p., il est clair que (u, θ) est solution du système S2 dans lequel $\widetilde{f}$ remplace f, au sens de la définition 2.2. De la même façon, on a $\widetilde{f}(\theta) \in (L^2(\Omega))^N$, et nous sommes dans les conditions d'application du cas précédent. Donc (u, θ) est solution du système S1 dans lequel $\widetilde{f}$ remplace f, au sens de la définition 1.3, et l'on peut conclure grâce à la propriété $\theta \geq r_0$ p.p. dans Ω.

■

Deuxième Partie

CHAPITRE 3

Existence d'une solution pour un système non linéaire en thermoviscoélasticité

3.1 Introduction

Nous considérons le système non linéaire de la thermoviscoélasticité suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left[A\boldsymbol{\varepsilon}(u) + B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] + Df(\theta) = g \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}\big(\mathbf{a}(x,t,D\theta)\big) = B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \tag{3.2}$$

$$u(t=0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = v_0, \quad \theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.3}$$

$$u = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T); \tag{3.4}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou $N = 3$) et $T > 0$, et on pose $Q = \Omega \times]0,T[$.

Les inconnues sont le champ de déplacement $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$ et le champ de température $\theta : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$. L'équation (3.1) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Les tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}(\nabla \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \frac{\partial u}{\partial t})^t)$ sont respectivement les tenseurs de déformation linéarisé et le tenseur des taux de déformations. Les tenseurs (d'ordre 4) A et B sont les tenseurs d'élasticité et de viscosité et vérifient les hypothèses habituelles de symétrie et coercivité (voir (3.13)). Le champ de contraintes de Cauchy est donné par $\sigma = A\boldsymbol{\varepsilon}(u) + B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)I$ (avec $I_{ij} = \delta_{ij}$) dans lequel $f(\theta)I$ représente la contrainte thermique ; la fonction f étant continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le vecteur $g : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^N$ représente les efforts extérieurs volumiques appliqués. L'équation (3.2) est l'équation de conservation de l'énergie dans laquelle le second membre que l'on peut écrire $(\sigma - A\boldsymbol{\varepsilon}(u))\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ est la dissipation intrinsèque mécanique dans le milieu (voir par exemple [19] et [30]). La masse volumique (ici constante) est aussi fixée à 1.

La linéarisation du système (3.1)-(3.2) autour d'une température constante conduit au système bien connu de la (visco)-thermoélasticité linéaire qui est étudié, par exemple, dans [17] (et la bibliographie de cet article). Dans ce travail nous tenons compte de la non linéarité de la dissipation mécanique dans (3.2). En supposant que $g \in L^2(\Omega \times (0,T))$, l'analyse du cas très simple où f est bornée montre que le second membre de (3.2) est au mieux dans $L^1(\Omega \times (0,T))$. Les nombreux travaux sur les équations paraboliques à données L^1 (linéaires ou non linéaires) depuis [7] (voir aussi [3], [5] et [12]) montrent que θ appartient, dans le cas le plus favorable, à $L^p(\Omega \times (0,T))$ avec $p < \frac{N+2}{N}$. Pour résoudre (3.1) et (3.2) (avec un second membre dans $L^1(\Omega \times (0,T))$ on est donc conduit à supposer que la fonction continue f, vérifie une hypothèse de croissance à l'infini du type :

$$|f(r)| \leq a + M|r|^{\alpha} \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ avec } a \geq 0, M \geq 0 \text{ et } \alpha < \frac{N+2}{2N}. \tag{3.5}$$

En fait, sous cette hypothèses de croissance, les arguments de type point fixe ou approximation ne permettent pas en général de conclure quant à l'existence d'une solution au système (3.1)–(3.4) (la difficulté étant d'obtenir une estimation sur θ).

Nous utiliserons le cadre des solutions renormalisées pour l'équation (3.2), ainsi que les résultats d'unicité et de stabilité des solutions renormalisées pour les problèmes paraboliques à données L^1 démontrés dans [5].

Dans la suite nous appellerons **S** le système (3.1)–(3.4). Dans le problème **S**,

$$\mathbf{a} : \Omega \times]0, T[\times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire telle que $\mathbf{a}(\cdot, \cdot, \xi)$ soit mesurable sur $\Omega \times]0, T[$ pour tout ξ dans $\mathbb{R}^N$, et $\mathbf{a}(x, t, \cdot)$ soit continue sur $\mathbb{R}^N$ pour presque tout (x, t) dans Q.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\exists \delta > 0, \quad \mathbf{a}(x, t, \xi) \cdot \xi \geq \delta |\xi|^2, \tag{3.6}$$

pour presque tout (x, t) dans Q et tout ξ dans $\mathbb{R}^N$;

$$\exists \beta > 0, \quad |\mathbf{a}(x, t, \xi)| \leq \beta(b(x, t) + |\xi|), \tag{3.7}$$

pour presque tout (x, t) dans Q et tout ξ dans $\mathbb{R}^N$, où b est une fonction de $L^2(Q)$;

$$(\mathbf{a}(x, t, \xi) - \mathbf{a}(x, t, \xi')) \cdot (\xi - \xi') \geq 0, \tag{3.8}$$

pour presque tout (x, t) dans Q et tout ξ, ξ' dans $\mathbb{R}^N$, $\xi \neq \xi'$;

$$g \in (L^2(Q))^N ; \tag{3.9}$$

$$u_0 \in (H_0^1(\Omega))^N, \quad v_0 \in (L^2(\Omega))^N ; \tag{3.10}$$

$$\theta_0 \in L^1(\Omega) ; \tag{3.11}$$

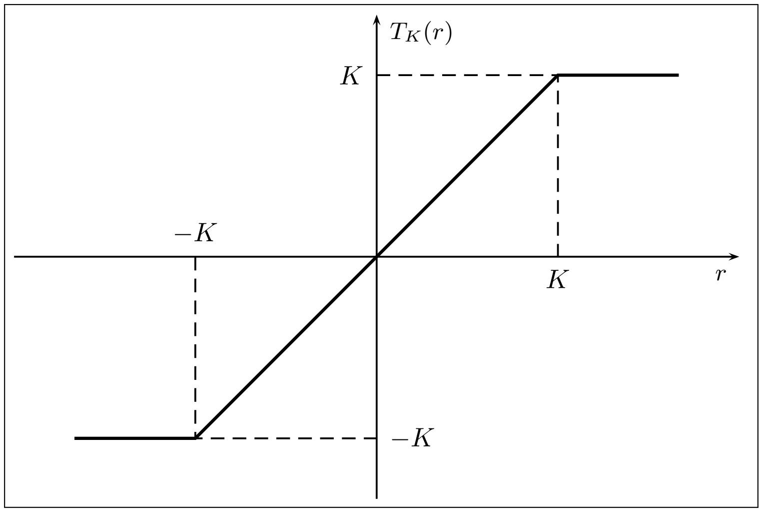
$$f \text{ est une fonction continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} ; \tag{3.12}$$

$A = (A_{ijkl})$ et $B = (B_{ijkl})$ $(1 \leq i, j, k, l \leq N)$ sont indépendants de t et vérifient, en utilisant la convention usuelle des indices répétés,

$$\begin{cases} A_{ijkl} \in L^{\infty}(\Omega), \quad B_{ijkl} \in L^{\infty}(\Omega), \quad (1 \leq i, j, k, l \leq N) \\ A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}, \quad B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{klij} \quad (1 \leq i, j, k, l \leq N) \\ \exists \gamma > 0 \text{ tel que } A_{ijkl}(x) d_{ij} d_{kl} \geq \gamma d_{ij} d_{ij} \text{ et } B_{ijkl}(x) d_{ij} d_{kl} \geq \gamma d_{ij} d_{ij} \\ \text{pour presque tout } x \text{ dans } \Omega \text{ et toute matrice symétrique } d = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}. \end{cases} \tag{3.13}$$

3.2 Définitions et rappels

Pour $K \geq 0$, on désigne par $T_K(r) = \min(K, \max(r, -K))$ la troncature à la hauteur K



et par $\varphi_K(r) = \int_0^r T_K(s)ds$, pour tout $r \in \mathbb{R}$.

Pour toute partie B de Ω, on note $\mathbb{1}_B$ la fonction caractéristique de l'ensemble B. Pour tout réel r, on note la partie positive $r^+ = \max(0, r)$ et la partie négative $r^- = \max(0, -r)$.

Dans la suite nous noterons $\mathbf{a}(D\theta) = \mathbf{a}(x, t, D\theta)$.

La définition suivante précise le sens, que nous utiliserons dans la suite, du gradient de fonctions, finies presque partout, dont les «tronquées» sont dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Cette définition est analogue à celle de la première partie (voir 1.1 et [1]), et il est à noter que ce n'est pas une définition au sens des distributions.

Définition 3.1
Soit θ une fonction mesurable de $\Omega\times]0, T[$ dans $\mathbb{R}$ et finie presque partout, telle que, pour tout $K > 0$, on ait $T_K(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Alors il existe un unique champ de vecteur v, mesurable de $\Omega\times]0, T[$ dans $\mathbb{R}^N$ et fini presque partout, tel que, pour tout $K > 0$,

$$DT_K(\theta) = \mathbb{1}_{\{|\theta|<K\}} v \quad \text{p.p. dans } \Omega\times]0, T[.$$

Dans la suite nous noterons dans ce cas $D\theta = v$.

Pour des problèmes paraboliques à données $L^1(\Omega)$ nous utiliserons les solutions renormalisées ([5] et [24]) ; nous rappelons ci-dessous la définition.

Définition 3.2 (Solution renormalisée)
Pour tout F dans $L^1(Q)$ et tout $\theta_0 \in L^1(\Omega)$, on appelle solution renormalisée du problème

$$P1(F, \theta_0) \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \operatorname{div}\big(\mathbf{a}(x, t, D\theta)\big) = F \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \theta(t = 0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

l'unique fonction θ, mesurable et définie sur Q, vérifiant les conditions :

(3.14) $\theta \in \mathcal{C}^0([0, T], L^1(\Omega)), \quad T_K(\theta) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \ \forall K \geq 0$;

pour toute fonction $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' soit à support compact dans $\mathbb{R}$,

(3.15) $$\frac{\partial S(\theta)}{\partial t} - \operatorname{div}\big(S'(\theta)\, \mathbf{a}(D\theta)\big) + S''(\theta)\, \mathbf{a}(D\theta) \cdot D\theta = F\, S'(\theta) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q) ;$$

(3.16) $\theta(t = 0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega$;

(3.17) $$\lim_{n\to\infty} \int_{\{n \leq |\theta| \leq n+1\}} |\mathrm{D}\theta|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 ;$$

Remarque 3.1 L'équation (3.15) correspond à la multiplication formelle de l'équation de $P1(F,\theta_0)$ par la fonction $S(\theta)$. Les régularités (3.14) permettent de définir $D\theta$ p.p. au sens de la définition 3.1. Considérons $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $S' \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, et soit $K > 0$ tel que $\operatorname{supp} S' \subset [-K,K]$. Le choix de K implique que $S(\theta) = S(T_K(\theta))$ p.p. dans Q. De plus on a

- $S'(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta) = S'(\theta)\,\mathbf{a}(DT_K(\theta))$ p.p. dans Q et les régularités (3.14) entraînent alors que $S'(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta) \in L^2(Q))$;
- $S''(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta)\cdot D\theta = S''(\theta)\,\mathbf{a}(DT_K(\theta))\cdot DT_K(\theta)$ p.p. dans Q et les régularités (3.14) entraînent alors $S''(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta)\cdot D\theta \in L^1(Q)$;
- $FS'(\theta) \in L^1(\Omega)$.

Ainsi tous les termes de (3.15) ont un sens dans $\mathcal{D}'(Q)$ et plus particulièrement dans $L^1(Q) + L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Il est à noter que l'équation (3.15) implique que $\frac{\partial S(\theta)}{\partial t} \in L^1(Q)+L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ pour toute fonction $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' soit à support compact dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.2 La solution renormalisée du problème $P1(F,\theta_0)$ est unique et dépend continûment des données (F,θ_0) (voir [5]).

La définition suivante précise la notion de solution pour le système **S** que nous utiliserons dans la suite.

Définition 3.3
Un couple de fonctions (u,θ) définies sur $\Omega\times(0,T)$ est une solution faible-renormalisée du système **S** si :

$$u \in \mathcal{C}^0(0,T;(H_0^1(\Omega))^N), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^N) \cap \mathcal{C}^0(0,T;(L^2(\Omega))^N)\,; \tag{3.18}$$

$$\theta \in \mathcal{C}^0([0,T],L^1(\Omega)), \quad T_K(\theta) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \;\forall K \geq 0\,; \tag{3.19}$$

$$f(\theta) \in L^2(Q)\,; \tag{3.20}$$

et si (u,θ) vérifie :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left[A\boldsymbol{\varepsilon}\,(u) + B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] + Df(\theta) = g \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(Q))^N; \tag{3.21}$$

pour toute fonction $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que S' soit à support compact dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(\theta)}{\partial t} &- \operatorname{div}\big(S'(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta)\big) + S''(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta)\cdot D\theta = \\ &S'(\theta)\times\left\{B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\right\} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q)\,;\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega\,; \tag{3.23}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{n\leq|\theta|\leq n+1\}} |\mathrm{D}\theta|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0\,; \tag{3.24}$$

$$u(t=0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = v_0, \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.25}$$

Remarque 3.3 Compte tenu des régularités (3.18), (3.19) et (3.20), la formulation (3.22)-(3.23)-(3.24) est celle d'une solution renormalisée θ de l'équation (3.2) (voir par exemple [5]). En particulier, pour une solution au sens de la définition 3.3, le terme $B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)$ appartient à $L^1(Q)$.

3.3 Rappels de quelques propriétés des solutions renormalisées

Nous commençons par une inégalité importante, démontrée dans [5], concernant la différence de deux solutions renormalisées. Soient $(F_1, F_2, \theta_{01}, \theta_{02}) \in L^1(Q)\times L^1(Q)\times L^1(\Omega)\times L^1(\Omega)$ et θ_1,

θ_2 les solutions renormalisées respectives de $P1(F_1, \theta_{01})$ et $P1(F_2, \theta_{02})$. Alors pour tout $K > 0$, on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_K(\theta_1 - \theta_2)(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_\Omega \mathbb{1}_{\{|\theta_1-\theta_2|\le K\}} \big(\mathbf{a}(D\theta_1) - \mathbf{a}(D\theta_2)\big) \cdot (D\theta_1 - D\theta_2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ \le \int_0^t \int_\Omega (F_1 - F_2) T_K(\theta_1 - \theta_2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_\Omega \varphi_K(\theta_{01} - \theta_{02})\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.26}$$

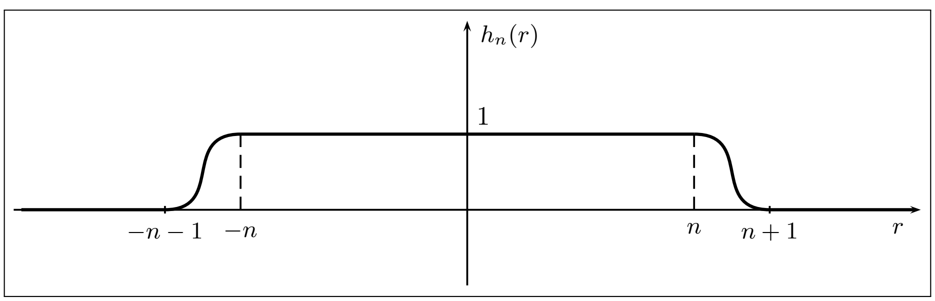
Cette inégalité entraîne l'unicité de la solution renormalisée ; elle entraîne aussi que l'application de $L^1(Q) \times L^1(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^0([0,T]; L^1(\Omega))$ qui à (F, θ_0) associe l'unique solution renormalisée de $P1(F, \theta_0)$ est continue et lipschitzienne de constante de Lipschitz 1 si l'on munit $L^1(Q) \times L^1(\Omega)$ de la norme $\|\cdot\|_{L^1(Q)} + \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$.

Soit $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{gathered} h(r) = 1 \text{ si } |r| \le 1, \\ h(r) = 0 \text{ si } |r| \ge 2, \\ 0 \le h(r) \le 1 \text{ si } r \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

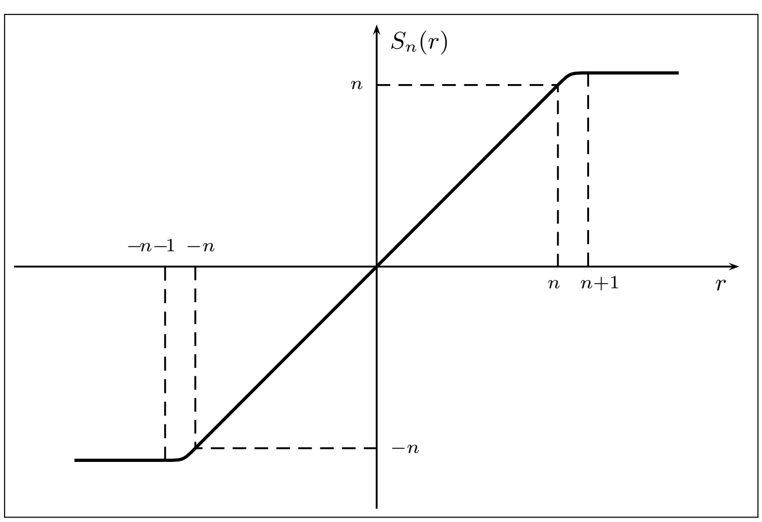
Pour tout $n \ge 2$, on note h_n, la fonction appartenant à $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, définie par

$$h_n(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } |r| \le n-1, \\ h\big(r - (n-1)\operatorname{sgn} r\big) & \text{si } |r| > n-1, \end{cases}$$



et $S_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$S_n(r) = \int_0^r h_n(s)\,\mathrm{d}s.$$



Considérons $F \in L^1(Q)$, $\theta_0 \in L^1(\Omega)$ et θ la solution renormalisée du problème $P1(F,\theta_0)$. La fonction S_n est une fonction «troncature régulière», et comme S_n' est à support compact dans $\mathbb{R}$, l'égalité (3.15) est vérifiée pour S_n. Pour $K > 0$, appliquons la fonction test $T_K(\theta) \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ à l'équation (3.15) dans laquelle S_n remplace S, on obtient en intégrant sur (0,t) pour tout $t \in [0,T]$

$$(3.27) \quad \int_0^t \left\langle \frac{\partial S_n(\theta)}{\partial t}, T_K(\theta) \right\rangle \mathrm{d}s + \int_0^t \int_\Omega S_n'(\theta)\, \mathbf{a}(D\theta) \cdot DT_K(\theta) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_0^t \int_\Omega T_K(\theta) S_n''(\theta)\, \mathbf{a}(D\theta) \cdot D\theta \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \int_0^t \int_\Omega F T_K(\theta) S_n'(\theta) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s,$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $L^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

En remarquant que pour $n > K$, on a $T_K(\theta) = T_K(S_n(\theta))$ et $S_n(\theta) \in L^\infty(Q) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, par le lemme 2.4 démontré dans [10] on obtient que pour tout $t \in [0,T]$ et $n > K$,

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial S_n(\theta)}{\partial t}, T_K(\theta) \right\rangle \mathrm{d}s = \int_\Omega \varphi_K(S_n(\theta))(t) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi_K(S_n(\theta_0)) \,\mathrm{d}x.$$

Grâce à l'hypothèse (3.7), on a

$$\left| \int_0^t \int_\Omega T_K(\theta) S_n''(\theta)\, \mathbf{a}(D\theta) \cdot D\theta \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \right| \le \beta K \sup_{r\in\mathbb{R}} |h'(r)| \times \left(\int_{\{n<|\theta|<n+1\}} |D\theta|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\{n<|\theta|<n+1\}} |b(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right).$$

La fonction b appartenant à $L^2(Q)$, d'après la définition 3.2 des solutions renormalisées, (3.14) et (3.17) impliquent que

$$\left| \int_0^t \int_\Omega T_K(\theta) S_n''(\theta)\, \mathbf{a}(D\theta) \cdot D\theta \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité (3.27), la propriété ci-dessus et le fait que $S_n(\theta) \xrightarrow{n\to+\infty} \theta$ dans $L^1(Q)$ fort et $S_n'(\theta) \xrightarrow{n\to+\infty} 1$ dans $L^\infty(Q)$ faible$*$, entraînent que pour tout $K > 0$ et tout $t \in [0,T]$,

$$(3.28) \quad \int_\Omega \varphi_K(\theta)(t) \,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_\Omega \mathbf{a}(D\theta) \cdot DT_K(\theta) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \int_0^t \int_\Omega F T_K(\theta) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_\Omega \varphi_K(\theta_0) \,\mathrm{d}x.$$

Cette égalité signifie que pour tout $K > 0$ la fonction $T_K(\theta)$ est une fonction test admissible dans l'équation de $P1(F,\theta_0)$. Cette propriété est vérifiée aussi pour les solutions renormalisées de problèmes elliptiques (voir [25], [26] et [27]).

Le lemme suivant concerne les techniques d'estimations de Boccardo-Gallouët démontrées dans [7]. Pour la suite, nous précisons la majoration de $D\theta$ dans $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$.

Lemme 3.1 *Soit θ une fonction appartenant à $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ telle que pour tout $K > 0$, $T_K(\theta) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $K > 0$,*

$$\int_Q |DT_K(\theta)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le K \times M.$$

Alors pour tout $q \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$, il existe $C(q,N,\Omega,T) > 0$, une constante indépendante de θ et M, telle que

$$\|\theta\|_{L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))} \le C(q,N,\Omega,T) \times M^{\frac{N+1}{N+2}} \times \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{\frac{1}{N+2}}.$$

Preuve du lemme 3.1.

Afin d'alléger les notations, posons $M_1 = \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = 2^k M_1^{\frac{2}{N+2}} M^{\frac{N}{N+2}}.$$

Soit $q \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$, comme $\theta \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ on peut écrire que

$$\int_Q \left|\theta\right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \int_{\{|\theta| \le a_0\}} \left|D\theta\right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\{a_k \le |\theta| \le a_{k+1}\}} \left|D\theta\right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{3.29}$$

L'inégalité de Hölder entraîne que

$$\begin{aligned}\int_{\{|\theta| \le a_0\}} \left|D\theta\right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\le \left(\int_Q \left|DT_{a_0}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{2}} \left(T\mathrm{mes}\{\Omega\}\right)^{\frac{2-q}{2}} \\ &\le M_1^{\frac{q}{N+2}} \times M^{\frac{q}{2}(1+\frac{N}{N+2})} \times \left(T\mathrm{mes}\{\Omega\}\right)^{\frac{2-q}{2}},\end{aligned} \tag{3.30}$$

et de la même façon, on a

$$\begin{aligned}\int_{\{a_k \le |\theta| \le a_{k+1}\}} \left|D\theta\right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\le \left(\int_Q \left|DT_{a_{k+1}}\theta\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{2}} \left(\mathrm{mes}\{a_k \le |\theta| \le a_{k+1}\}\right)^{\frac{2-q}{2}} \\ &\le M^{\frac{q}{2}} \times a_{k+1}^{\frac{q}{2}} \times \left(\mathrm{mes}\{a_k \le |\theta| \le a_{k+1}\}\right)^{\frac{2-q}{2}}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Majorons le terme de droite de l'inégalité précédente ; pour $p = \dfrac{2}{N} + 2$ on a

$$\mathrm{mes}\{a_k \le |\theta| \le a_{k+1}\} \le \int_Q \left|T_{a_k}(\theta)\right|^r \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \times \frac{1}{a_k^r}. \tag{3.32}$$

En utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, pour $N = 2$ ou $N = 3$, il existe $C_1 > 0$, une constante ne dépendant que de r, N et Ω, telle que pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\left\|T_{a_k}(\theta)(t)\right\|_{L^r(\Omega)} \le C_1 \left\|T_{a_k}(\theta)(t)\right\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{2}{r}} \left\|T_{a_k}(\theta)(t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{2}{r}}.$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré, l'inégalité précédente nous donne, pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|T_{a_k}(\theta)(t)\right|^r \mathrm{d}x &\le C_2 \left\|T_{a_k}(\theta)(t)\right\|_{L^1(\Omega)}^{r-2} \int_\Omega \left|DT_{a_k}(\theta)(t)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\le C_2 \left\|\theta\right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{\frac{2}{N}} \int_\Omega \left|DT_{a_k}(\theta)(t)\right|^2 \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où C_2 est une constante ne dépendant que de r, N et Ω.

En intégrant l'inégalité précédente sur $(0,T)$, le théorème de Fubini implique que

$$\begin{aligned}\int_Q \left|T_{a_k}(\theta)\right|^r \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &\le C_2 M_1^{\frac{2}{N}} \int_Q \left|DT_{a_k}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ &\le C_2 M_1^{\frac{2}{N}} \times a_k \times M,\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse sur θ.

L'inégalité ci-dessus, (3.32) et (3.31) entraînent alors que

$$\int_{\{a_k \le |\theta| \le a_{k+1}\}} \left|D\theta\right|^q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le M^{\frac{q}{2}} a_{k+1}^{\frac{q}{2}} \left(C_2 M_1^{\frac{2}{N}} a_k^{1-r} M\right)^{\frac{2-q}{2}},$$

et en utilisant la définition de a_k et après le calcul explicite des puissances de M, M_1 et 2, on obtient que

$$\int_{\{a_k \le |\theta| \le a_{k+1}\}} \left|D\theta\right|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le C_3 M^{q\frac{N+1}{N+2}} M_1^{\frac{q}{N+2}} 2^{k(q\frac{N+1}{N}-\frac{N+2}{N})},$$

où C_3 est une constante ne dépendant que q, N et Ω.

En remarquant que la série $\left(2^{k(q\frac{N+1}{N}-\frac{N+2}{N})}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $q \le \frac{N+2}{N+1}$, l'inégalité ci-dessus, (3.29) et (3.30) entraînent que

$$\int_Q \left|D\theta\right|^q \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le M^{q\frac{N+1}{N+2}} M_1^{\frac{q}{N+2}} \times \left(\left(T\mathrm{mes}\{\Omega\}\right)^{\frac{2-q}{2}} + C_3 \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(q\frac{N+1}{N}-\frac{N+2}{N})}\right).$$

Cette estimation sur $D\theta$ permet de déduire que, pour tout $K > 0$, $T_K(\theta)$ est bornée uniformément en K dans $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ et ainsi on obtient d'une part que $\theta \in L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$, et d'autre part que $D\theta$, au sens de la définition 3.1, et le gradient de θ, au sens de la régularité $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$, coïncident. L'inégalité de Poincaré entraîne que pour tout $q \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$, il existe $C(q,N,\Omega,T) > 0$, une constante ne dépendant que de q, N, Ω et T, telle que

$$\left\|\theta\right\|_{L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))} \le C(q,N,\Omega,T) \times M^{\frac{N+1}{N+2}} \times \left\|\theta\right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{\frac{1}{N+2}}.$$

■

Remarque 3.4 Dans ce chapitre, nous supposons que la dimension N est égale à 2 ou 3, mais le lemme précédent reste valable dans le cas général où $N \ge 2$. Remarquons que la démonstration du lemme 3.1 peut se faire en utilisant les techniques utilisées dans [1] (lemme 4.1 et lemme 4.2) ; sous les hypothèses du lemme 3.1, on établit, par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (comme dans la démonstration précédente) et l'utilisation des espaces de Marcinkiewicz, une estimation de θ dans $L^p(Q)$, pour tout $p < \frac{N+2}{N}$; ensuite une estimation sur $\mathrm{mes}\{|D\theta| > h\}$, pour tout $h > 0$, (lemme 4.2 dans [1]) permet d'obtenir le résultat du lemme 3.1.

Le lemme 3.1 et l'égalité (3.28) vont nous permettre de démontrer une propriété importante des solutions renormalisées des problèmes $P1(F,\theta_0)$. Soient $F \in L^1(Q)$, $\theta_0 \in L^1(\Omega)$ et θ, l'unique solution renormalisée du problème $P1(F,\theta_0)$. Alors pour tout $p < \frac{N+2}{N}$, il existe $C(p,N,\Omega,T)$, une constante ne dépendant que p, N, Ω et T, telle que

$$\left\|\theta\right\|_{L^p(Q)} \le C(p,N,\Omega,T) \left(\frac{\|F\|_{L^1(Q)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}}{\delta}\right)^{\frac{N}{N+2}} \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{\frac{2}{N+2}}. \tag{3.33}$$

Démonstration. Soit $p \in [1, \frac{N+2}{N}[$.

Pour tout $K > 0$, l'égalité (3.28) pour $t = T$, la coercivité (3.6) et la positivité de la fonction φ_K entraînent que

$$\delta \int_Q \left|DT_K(\theta)\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le K\left\|F\right\|_{L^1(Q)} + \int_\Omega \varphi_K(\theta_0)\,\mathrm{d}x,$$

par suite une majoration de la fonction φ_K nous donne, pour tout $K > 0$,

$$\delta \int_Q \left|DT_K(\theta)\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le K\left(\left\|F\right\|_{L^1(Q)} + \left\|\theta_0\right\|_{L^1(\Omega)}\right).$$

D'après la définition 3.2 des solutions renormalisées, on a de plus $\theta \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. Ainsi la fonction θ vérifie l'hypothèse du lemme 3.1. Distinguons alors 2 cas :

1^er^ cas : $\frac{N+1}{N} \le p < \frac{N+2}{N}$.

Soit $q \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$ tel que $p = p + \frac{q}{N}$. D'après le lemme 3.1, soient $C(p, N, \Omega, T) > 0$, une constante ne dépendant que de p, N, Ω et T, telle que

$$\|\theta\|_{L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))} \leq C(p, N, \Omega, T) \left(\frac{\|F\|_{L^1(Q)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}}{\delta} \right)^{\frac{N+1}{N+2}} \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{\frac{1}{N+2}}. \tag{3.34}$$

Pour presque tout $t \in [0, T]$, l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg nous donne

$$\|\theta(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \|\theta(t)\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{q}{p}} \|\theta(t)\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^{\frac{q}{p}},$$

où C_1 est une constante ne dépendant que de p, N et Ω.

Par suite, en élevant à la puissance p l'inégalité ci-dessus et en intégrant sur $(0, T)$, on obtient que

$$\int_Q |\theta|^p \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leq C_1 \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{p-q} \int_Q |D\theta|^q \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

L'inégalité ci-dessus et (3.34) entraînent alors que

$$\|\theta\|_{L^p(Q)} \leq C_1^{\frac{1}{p}} \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{\frac{p-q}{p}} C(p, N, \Omega, T)^{\frac{q}{p}} \left(\frac{\|F\|_{L^1(Q)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}}{\delta} \right)^{\frac{q(N+1)}{p(N+2)}} \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{\frac{q}{p(N+2)}}.$$

Comme $\frac{p-q}{p} + \frac{q}{p(N+2)} = \frac{1}{N+1} + \frac{N}{(N+1)(N+2)} = \frac{2}{N+2}$, on obtient alors l'inégalité (3.33).

2$^{\text{ème}}$ cas : $p < \frac{N+1}{N}$.

L'inégalité de Hölder entraîne que

$$\|\theta\|_{L^p(Q)} \leq \big(T \mathrm{mes}\{\Omega\}\big)^{\frac{1}{p} - \frac{N}{N+1}} \|\theta\|_{L^{\frac{N+1}{N}}(Q)},$$

et d'après le cas précédent on obtient alors l'inégalité (3.33). ■

En utilisant le caractère lipschitzien des solutions renormalisées par rapport aux données, on obtient que

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq \|F\|_{L^1(Q)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)},$$

ce qui nous donne avec (3.33), pour tout $p \in [1, \frac{N+2}{N}[$,

$$\|\theta\|_{L^p(Q)} \leq C(p, N, \Omega, T) \big(\|F\|_{L^1(Q)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}\big) \frac{1}{\delta^{\frac{N}{N+2}}}, \tag{3.35}$$

où $C(p, N, \Omega, T)$ est une constante ne dépendant que de p, N, Ω et T.

Après ces résultats de régularité concernant les solutions renormalisées du problème $P1(F, \theta_0)$, nous allons démontrer un résultat de compacité. Soit $p \in [1, \frac{N+2}{N}[$ et considérons, d'après (3.35), l'application définie par

$$\begin{aligned} \Gamma_p \, : \, L^1(Q) \times L^1(\Omega) &\longrightarrow L^p(Q) \\ (F, \theta_0) &\longrightarrow \theta \quad \text{où } \theta \text{ est l'unique solution renormalisée de } P1(F, \theta_0). \end{aligned}$$

Montrons que Γ_p est continue et compacte.

Démonstration. Soient F_1, $F_2 \in L^1(Q)$, $\theta_{01}\, \theta_{02} \in L^1(\Omega)$ et $\theta_1 = \Gamma_p(F_1, \theta_{01})$, $\theta_2 = \Gamma_p(F_2, \theta_{02})$. Dans le cas où $p = 1$, d'après [5], Γ_p est continue. Dans le cas où $p > 1$, soit q tel que $p < q < \frac{N+2}{N}$, et par interpolation entre $L^1(Q)$ et $L^q(Q)$, on a

$$\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^p(Q)} \leq \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^1(Q)}^{\frac{q-p}{p(q-1)}} \times \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^q(Q)}^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}},$$

ce qui nous donne, d'après le caractère lipschitzien dans $L^1(Q)$ des solutions renormalisées et l'estimation (3.35) pour q ($q \in [1, \frac{N+2}{N}[$), l'inégalité

$$\begin{aligned}(3.36)\qquad \|\theta_1-\theta_2\|_{L^p(Q)} \leq & C(q,N,\Omega,\delta,T)\Big(\|F_1-F_2\|_{L^1(Q)}+\|\theta_{01}-\theta_{02}\|_{L^1(\Omega)}\Big)^{\frac{q-p}{p(q-1)}} \\ & \times \Big(\|F_1\|_{L^1(Q)}+\|\theta_{01}\|_{L^1(\Omega)}+\|F_2\|_{L^1(Q)}+\|\theta_{02}\|_{L^1(\Omega)}\Big)^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}},\end{aligned}$$

où $C(q,N,\Omega,\delta,T)$ est une constante ne dépendant que de q, N, Ω, T et δ.

Cette inégalité entraîne clairement la continuité de l'application Γ_p.

Pour démontrer la compacité de l'application Γ_p, considérons une suite $\big(F_n,\theta_{0n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans l'espace $L^1(Q)\times L^1(\Omega)$ et $\theta_n=\Gamma_p(F_n,\theta_{0n})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Fixons $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq 2$, et considérons la fonction S_k, définie précédemment. Comme θ_n est solution renormalisée du problème $P1(F_n,\theta_{0n})$, on a d'après la propriété (3.28),

$$\int_\Omega \varphi_{k+1}(\theta_n)(T)\,\mathrm{d}x+\int_Q \mathbf{a}(D\theta_n)\cdot DT_{k+1}(\theta_n)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_Q F_nT_{k+1}(\theta_n)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_\Omega \varphi_{k+1}(\theta_{0n})\,\mathrm{d}x.$$

L'égalité précédente, la coercivité de l'opérateur $\mathbf{a}$ et la positivité de φ_{k+1} impliquent que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_Q\big|DT_{k+1}(\theta_n)\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leq\frac{k+1}{\delta}\times\Big(\|F_n\|_{L^1(Q)}+\|\theta_{0n}\|_{L^1(\Omega)}\Big).$$

D'après la définition de S_k, on a $S_k\circ T_{k+1}=S_k$, ce qui nous donne $D\big(S_k(\theta_n)\big)=h_k(\theta_n)DT_{k+1}(\theta_n)$. Par suite, comme $0\leq h_k\leq 1$, on obtient que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_Q\big|DS_k(\theta_n)\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leq\frac{k+1}{\delta}\times\Big(\|F_n\|_{L^1(Q)}+\|\theta_{0n}\|_{L^1(\Omega)}\Big).$$

Ainsi, la suite $\big(S_k(\theta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Rappelons que $S_k\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et S_k' à support compact dans $\mathbb{R}$. Donc d'après la définition 3.2 (solution renormalisée), on obtient que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\partial S_k(\theta_n)}{\partial t}-\operatorname{div}\big(S_k'(\theta_n)\,\mathbf{a}(D\theta_n)\big)+S_k''(\theta_n)\,\mathbf{a}(D\theta_n)\cdot D\theta_n=F_n\,S_k'(\theta_n)\;\text{ dans }\mathcal{D}'(Q).$$

Cette égalité peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_k(\theta_n)}{\partial t}=&\operatorname{div}\big(S_k'(\theta_n)\,\mathbf{a}(DT_{k+1}(\theta_n))\big)\\&-S_k''(\theta_n)\,\mathbf{a}\big(DT_{k+1}(\theta_n)\big)\cdot DT_{k+1}(\theta_n)+F_n\,S_k'(\theta_n)\;\text{ dans }\mathcal{D}'(Q).\end{aligned}$$

On obtient ainsi que la suite $\big(\frac{\partial S_k(\theta_n)}{\partial t}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(0,T;L^1(\Omega))+L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, donc bornée dans $L^1(0,T;W^{-1,s}(\Omega))$ pour $s<\inf(2,\frac{N}{N-1})$. D'après un lemme de type Aubin (voir [29]), on en déduit que $\big(S_k(\theta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est compact dans $L^2(Q)$. Donc, à une sous suite près, $S_k(\theta_n)$ converge presque partout dans Q.

Par un procédé de construction de suite diagonale, il existe une sous-suite, encore notée $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $k\geq 2$,

$$S_k(\theta_n)\xrightarrow{n\to\infty}\phi_k\;\text{ p.p. dans }Q,$$

et d'après la définition de S_k ($T_k\circ S_k=T_k$), on en déduit que

$$T_k(\theta_n)\xrightarrow{n\to\infty}T_k(\phi_k)\;\text{ p.p. dans }Q.$$

En appliquant un lemme de F. Murat (voir [25]), on en déduit l'existence de θ mesurable sur Q telle que

$$\theta_n\xrightarrow{n\to\infty}\theta\;\text{ p.p. dans }Q.$$

Soit $q \in [1, \frac{N+2}{N}[$ tel que $p < q$. D'après l'inégalité (3.35) appliquée à q, comme $(F_n, \theta_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(Q)\times L^1(\Omega)$, on obtient que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^q(Q)$. La convergence presque partout de θ_n vers θ et le lemme de Fatou entraînent alors que $\theta \in L^q(Q)$. Comme $p < q$, par un résultat classique d'analyse, on obtient finalement que

$$\theta_n \xrightarrow{n\to\infty} \theta \quad \text{dans } L^p(Q) \text{ fort,}$$

et ainsi l'application Γ_p est continue et compacte. ■

3.4 Existence d'une solution pour des données petites

Dans le cas où la fonction continue f vérifie une hypothèse de croissance du type (3.5), les propriétés démontrées précédemment concernant les solutions renormalisées vont nous permettre d'établir, par un théorème de point fixe, un premier résultat d'existence d'une solution du système **S** pour des données petites.

Théorème 3.1 *On suppose vérifiées les hypothèses (3.6)–(3.13) et que la fonction continue f vérifie $|f(r)| \leq a+M|r|^\alpha$, $\forall r \in \mathbb{R}$, avec $\alpha \in]\frac{1}{2}, \frac{N+2}{2N}[$, $a \geq 0$ et $M \geq 0$. Alors il existe $\eta > 0$ (dépendant de $\Omega, T, A, B, M, \alpha$) tel que si $a + \|u_0\|_{(H_0^1(\Omega))^N} + \|v_0\|_{(L^2(\Omega))^N} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{(L^2(\Omega))^N} < \eta$ alors il existe au moins une solution du système **S** au sens de la définition 3.3.*

Preuve du théorème 3.1. Nous procéderons par point fixe.

D'après l'hypothèse de croissance vérifiée par la fonction f, soient $a \geq 0$, $M \geq 0$ et $\alpha \in]\frac{1}{2}, \frac{N+2}{2N}[$ tels que

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad |f(r)| \leq a + M|r|^\alpha. \tag{3.37}$$

Soit $\hat\theta \in L^{2\alpha}(Q)$. La condition (3.37) entraîne que $f(\hat\theta) \in L^2(Q)$, et ainsi $g - Df(\hat\theta) \in (L^2(Q))^N + L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^N)$. Ainsi, sous les hypothèses (3.9), (3.10) et (3.13), par la méthode de Galerkin (voir [23] et [13]) et en utilisant l'inégalité de Korn (voir [16]), on démontre l'existence d'un unique u, défini de Q dans $\mathbb{R}^N$, vérifiant

$$u \in \mathcal{C}^0(0,T;(H_0^1(\Omega))^N), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^N) \cap \mathcal{C}^0(0,T;(L^2(\Omega))^N), \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left[A\boldsymbol{\varepsilon}(u) + B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] = g - Df(\hat\theta) \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(Q))^N, \tag{3.39}$$

$$u(t=0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = v_0, \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.40}$$

La linéarité par rapport à u de l'équation (3.39) et l'inégalité de Korn entraînent que, sous les hypothèses (3.9), (3.10) et (3.13), la solution u vérifiant (3.38)–(3.40) est unique et dépend continûment des données. Les données g, u_0 et v_0 étant fixes, l'inégalité de Korn et le fait que A et B soient indépendants de t entraînent qu'il existe $C_1 > 0$, une constante ne dépendant que de T, Ω, A et B, telle que, pour tout $\hat\theta_1, \hat\theta_2 \in L^{2\alpha}(Q)$, si u_1, u_2 sont les solutions respectives des problèmes (3.38)–(3.40) dans lesquels $\hat\theta$ est remplacée par $\hat\theta_1$ et $\hat\theta_2$, alors on a

$$\begin{aligned}
&\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(0,T;(H_0^1(\Omega))^N)} \leq C_1 \times \|f(\hat\theta_1) - f(\hat\theta_2)\|_{L^2(Q)},\\
&\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^N)} \leq C_1 \times \|f(\hat\theta_1) - f(\hat\theta_2)\|_{L^2(Q)},\\
&\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^N)} \leq C_1 \times \|f(\hat\theta_1) - f(\hat\theta_2)\|_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

L'hypothèse de croissance (3.37), et la régularité (3.38) entraînent que $B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\hat{\theta})\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \in L^1(Q)$. Ainsi, d'après ce qui précède, l'application R_1 définie par

$$\begin{aligned} R_1 \, : \, L^{2\alpha}(Q) &\longrightarrow L^1(Q) \\ \hat{\theta} &\longrightarrow B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\hat{\theta})\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right), \\ &\qquad \text{où } u \text{ est l'unique solution de (3.38)–(3.40),} \end{aligned}$$

est bien définie et continue de $L^{2\alpha}(Q)$ dans $L^1(Q)$.

Comme $2\alpha \in]1, \frac{N+2}{N}[$, ceci nous permet de définir l'application, notée R, définie par

$$\begin{aligned} R \, : \, L^{2\alpha}(Q) &\longrightarrow L^{2\alpha}(Q) \\ \hat{\theta} &\longrightarrow \theta = \Gamma_{2\alpha}(R_1(\hat{\theta}), \theta_0), \end{aligned}$$

où $\Gamma_{2\alpha}$ est l'application définie précédemment.

D'après les propriétés des solutions renormalisées, l'application R est bien définie et continue de $L^{2\alpha}(Q)$ dans lui-même. Montrons que R est compacte.

Soient $\hat{\theta} \in L^{2\alpha}(Q)$ et u solution du problème (3.38)–(3.40). Majorons $\|R_1(\hat{\theta})\|_{L^1(Q)}$ par une fonction de $\hat{\theta}$. La régularité (3.38) nous permet d'appliquer la fonction test $\frac{\partial u}{\partial t}$ à l'équation (3.39) et d'obtenir par intégration sur $(0, T)$,

$$\begin{aligned} (3.41) \quad & \int_0^T \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle_{(H^{-1}(\Omega))^N, (H_0^1(\Omega))^N} + \int_0^T \int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u) \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s \\ & + \int_0^T \int_\Omega B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega g \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega f(\hat{\theta}) \mathrm{tr}\left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^N, (H_0^1(\Omega))^N}$ désigne le crochet de dualité entre $(H^{-1}(\Omega))^N$ et $(H_0^1(\Omega))^N$.

Les conditions (3.13) de symétrie des tenseurs A et B permettent d'en déduire que $A\boldsymbol{\varepsilon}(u) \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t} = A\boldsymbol{\varepsilon}(u) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(u)$ et $B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial t} = B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ p.p. dans Q. Par suite une intégration par partie des deux premiers termes de l'égalité (3.41) nous donne :

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t}(T) \right|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(u)(T) \, \mathrm{d}x + \int_Q B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ & \quad = \int_Q g \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_Q f(\hat{\theta}) \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_\Omega |v_0|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u_0) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(u_0) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

La positivité de chaque terme du membre de gauche de l'égalité précédente, la coercivité du tenseur B et l'inégalité de Korn entraînent que

$$\begin{aligned} \|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{(L^2(Q))^{N \times N}} \leq C_2 \Bigg(& \int_Q g \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_Q f(\hat{\theta}) \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\ & + \int_\Omega |v_0|^2 \, \mathrm{d}x + \|u_0\|^2_{(H_0^1(\Omega))^N} \Bigg), \end{aligned}$$

où C_2 est une constante ne dépendant que de Ω, A et B.

Par suite, l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young impliquent que

$$\|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{(L^2(Q))^{N \times N}} \leq C_3 \left(\|g\|^2_{(L^2(Q))^N} + \|f(\hat{\theta})\|^2_{L^2(Q)} + \|v_0\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|u_0\|^2_{(H_0^1(\Omega))^N} \right),$$

où C_3 est une constante ne dépendant que Ω, A et B.

Finalement on obtient que

$$\|R_1(\hat\theta)\|_{L^1(Q)} = \left\|B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\hat\theta)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\right\|_{L^1(Q)} \le C_4\left(\|g\|^2_{(L^2(Q))^N} + \|f(\hat\theta)\|^2_{L^2(Q)} + \|v_0\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|u_0\|^2_{(H^1_0(\Omega))^N}\right), \tag{3.42}$$

où C_4 est une constante ne dépendant que Ω, A et B.

L'inégalité (3.42) va nous permettre de démontrer que l'application continue R est compacte. En effet, soit $(\hat\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^{2\alpha}(Q)$. La condition (3.37) nous donne

$$\int_Q |f(\hat\theta_n)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \int_Q \left(a + M|\hat\theta_n|^\alpha\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le T\mathrm{mes}\{\Omega\}a^2 + M^2\|\hat\theta_n\|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}(Q)},$$

ce qui implique, d'après l'inégalité (3.42), que $(R_1(\hat\theta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(Q)$. D'après les propriétés des solutions renormalisées, $\Gamma_{2\alpha}$ est une application continue et compacte de $L^1(Q)\times L^1(\Omega)$ dans $L^{2\alpha}(Q)$. Donc $(\Gamma_{2\alpha}(R_1(\hat\theta_n),\theta_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est compact dans $L^{2\alpha}(Q)$, et ainsi l'application R est continue et compact de $L^{2\alpha}(Q)$ dans lui-même.

Soit $\hat\theta \in L^{2\alpha}(Q)$ et posons $\theta = R(\hat\theta)$. Comme θ est solution renormalisée du problème $P1(R_1(\hat\theta),\theta_0)$, l'inégalité (3.35) appliquée pour $p = 2\alpha$ (voir propriétés des solutions renormalisées) nous donne que

$$\|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)} \le C_5\left(\|R_1(\hat\theta)\|_{L^1(Q)} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}\right),$$

où C_5 est une constante ne dépendant que Ω, N, 2α, T et $\mathbf{a}$.

De l'inégalité (3.42), on en déduit que

$$\|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)} \le C_6\left(\|g\|^2_{(L^2(Q))^N} + \|v_0\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|u_0\|^2_{(H^1_0(\Omega))^N} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)} + T\mathrm{mes}\{\Omega\}a^2 + M^2\|\hat\theta\|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}(Q)}\right), \tag{3.43}$$

où C_5 est une constante ne dépendant que Ω, N, 2α, T, $\mathbf{a}$, A et B.

Afin d'appliquer le théorème du point fixe Schauder, l'inégalité ci-dessus va nous permettre de donner une condition suffisante sur a, g, u_0, v_0 et θ_0 en fonction de M pour trouver un convexe fermé borné stable par l'application R.
Soient $r > 0$ et $\eta > 0$ tels que $C_6M^2r^{2\alpha} < r$ et $C_6(\eta + M^2r^{2\alpha}) \le r$.
Si $\|g\|^2_{(L^2(Q))^N} + \|v_0\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|u_0\|^2_{(H^1_0(\Omega))^N} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)} + T\mathrm{mes}\{\Omega\}a^2 \le \eta$, alors pour tout $\hat\theta \in \overline{\mathrm{B}}_{L^{2\alpha}(Q)}(0,r)$ l'inégalité (3.43) entraîne que

$$\|\theta\|_{L^{2\alpha}(Q)} = \|R(\hat\theta)\|_{L^{2\alpha}(Q)} \le C_6\left(\eta + M^2\|\hat\theta\|^{2\alpha}_{L^{2\alpha}(Q)}\right) \le C_6\left(\eta + M^2r^2\right) \le r,$$

ce qui nous donne $R(\overline{\mathrm{B}}_{L^{2\alpha}(Q)}(0,r)) \subset \overline{\mathrm{B}}_{L^{2\alpha}(Q)}(0,r)$.

Supposons que $\|g\|^2_{(L^2(Q))^N} + \|v_0\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|u_0\|^2_{(H^1_0(\Omega))^N} + \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)} + T\mathrm{mes}\{\Omega\}a^2 \le \eta$. Le théorème du point fixe de Schauder nous donne l'existence de $\theta \in L^{2\alpha}(Q)$ tel que $R(\theta) = \theta$. Dans ce cas, d'après la définition de R, soit u vérifiant (3.38)–(3.40) dans lequel $f(\theta)$ remplace $f(\hat\theta)$. On obtient de plus, comme θ est point fixe, que θ est solution renormalisée du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \mathrm{div}\big(\mathbf{a}(x,t,D\theta)\big) = B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\right) & \text{dans } \Omega\times(0,T), \\ \theta(t=0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times(0,T). \end{cases}$$

La régularité de θ et la condition (3.37) entraînent que $f(\theta) \in L^2(Q)$, et ainsi (u, θ) est solution faible-renormalisée du système **S** au sens de la définition 3.3, et de plus la solution obtenue est petite. ■

Remarque 3.5 Dans le cas général, comme $2\alpha > 1$, l'inégalité (3.43) ne permet pas d'obtenir l'existence d'un convexe fermé borné stable par l'application R. Il suffit de prendre a tel que $a^2 T \mathrm{mes}\{\Omega\}$ soit suffisamment grand devant M^2. On peut remarquer aussi que, sous les hypothèses du théorème 3.1, plus la valeur de M est petite, plus la valeur du η défini dans la démonstration peut être grande.

Remarque 3.6 Dans le cas d'une fonction continue f bornée, l'analyse de la démonstration du théorème 3.1 permet d'obtenir l'existence d'une solution faible-renormalisée (u, θ) du système **S** au sens de la définition 3.3. En effet, dans ce cas, l'application R, ainsi construite de $L^1(Q)$ dans $L^1(Q)$, reste continue et compacte, et de plus la méthode qui a conduit à l'inégalité (3.43) entraîne, comme f est bornée, que l'image par R de $L^1(Q)$ est bornée dans $L^1(Q)$. Ainsi, sans aucune condition sur a, g, u_0, v_0 et θ_0, le théorème du point fixe de Schauder permet de conclure quant à l'existence d'une solution (u, θ) au système **S**.

3.5 Existence d'une solution sous une hypothèse sur f sur $\mathbb{R}^-$

Dans le cas général où la fonction continue f vérifie l'hypothèse de croissance (3.5), on obtient (voir la démonstration du théorème 3.1) pour le système **S**, l'estimation suivante pour tout $p \in [1, \frac{N+2}{N}[$,

$$\|\theta\|_{L^p(Q)} \leq C\left(1 + \int_Q |\theta|^{2\alpha}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\right),$$

où C dépend de p, Ω, T et des données.

Pour $\alpha < 1/2$, par point fixe ou par approximation, cette estimation est suffisante pour obtenir l'existence d'une solution pour le système **S**. Pour $1/2 < \alpha < \frac{N+2}{2N}$ et sans hypothèse sur les données, cette estimation paraît insuffisante (que ce soit par point fixe ou par approximation). Dans le cas où la fonction f vérifie une hypothèse de croissance plus forte sur $\mathbb{R}^-$ (voir condition (H-1) du théorème 3.2) et du type (3.5) sur $\mathbb{R}^+$, une estimation sur un problème approché utilisant fortement le couplage des équations (3.1) et (3.2) va nous permettre de s'affranchir de l'hypothèse de petites données. Ce résultat étant obtenu, la structure de l'équation (3.2) entraînera, dans le cas où un réel négatif est à la fois zéro de f et borne inférieure de θ_0 et sous l'hypothèse (3.5), l'existence d'une solution pour le système.

Théorème 3.2 *On suppose vérifiées les hypothèses (3.6)–(3.13), et que la fonction continue f vérifie $|f(r)| \leq a + M|r|^\alpha$, $\forall r \in \mathbb{R}^+$, avec $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{N+2}{2N}[$, $a \geq 0$ et $M \geq 0$. On suppose de plus que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(H-1) $\exists C > 0,\ \forall r \in \mathbb{R}^-\ |f(r)| \leq C(1 + |r|)^{\frac{1}{2}}$,

(H-2) $\exists r_0 \in \mathbb{R}^-$ *tel que* $f(r_0) = 0$ *et* $\theta_0 \geq r_0$ *p.p. dans* Ω.

*Alors il existe au moins une solution (u, θ) du système **S** au sens de la définition 3.3, telle que, sous l'hypothèse (H-2) on ait $\theta \geq r_0$ p.p. dans Q.*

Preuve du théorème 3.2. Nous commençons par le cas où l'hypothèse (H-1) est vérifiée. Nous procédons par approximation et passage à la limite.

Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $f^\varepsilon = f \circ T_{\frac{1}{\varepsilon}}$. La fonction f^ε étant continue et bornée, sous les hypothèses (3.6)–(3.13), et d'après la remarque 3.6, soit $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ une solution faible-renormalisée du problème approché $\mathbf{S}_\varepsilon$ ((3.1)–(3.4) dans lequel f^ε remplace f) au sens de la définition 3.3.

D'après la régularité (3.18) de u^ε, en appliquant la fonction test $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ à l'équation $(3.21)_\varepsilon$, on obtient, après intégration sur $(0,T)$ et calculs qui utilisent les propriétés (3.13) de symétrie des tenseurs A et B, l'égalité pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}(3.44)\quad & \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(u^\varepsilon)(t)\,\mathrm{d}x \\ & + \int_0^t\int_\Omega B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s - \int_0^t\int_\Omega f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ & = \int_0^t\int_\Omega g\cdot\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_\Omega |v_0|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'après les propriétés des solutions renormalisées (égalité (3.28)), θ^ε étant solution renormalisée de $(3.2)_\varepsilon$ avec la donnée initiale $\theta^\varepsilon(t=0)=\theta_0$ sur Ω et la condition limite $\theta^\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega\times(0,T)$, on obtient pour tout $K>0$ et tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}(3.45)\quad & \int_\Omega \varphi_K(\theta^\varepsilon)(t)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega \mathbf{a}(D\theta^\varepsilon)\cdot DT_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \int_\Omega \varphi_K(\theta_0)\,\mathrm{d}x \\ & + \int_0^t\int_\Omega \left[B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right)\right]T_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Les propriétés de coercivité et de symétrie de l'opérateur B, défini de l'ensemble des matrices symétriques $N\times N$ dans lui-même, permettent de définir, pour presque tout $x\in\Omega$, $B^{-1}(x)$, opérateur inverse de $B(x)$. La propriété de symétrie implique que si d_1 et d_2 sont deux matrices $N\times N$ symétriques, alors on a, pour presque tout x dans Ω,

$$B(x)d_1\cdot d_1 - d_2\cdot d_1 = B(x)\big(d_1 - \frac{1}{2}B^{-1}(x)d_2\big)\cdot\big(d_1-\frac{1}{2}B^{-1}(x)d_2\big) - \frac{1}{4}B^{-1}(x)d_2\cdot d_2$$

Grâce à cette propriété, la combinaison linéaire $K\times(3.44)+(3.45)$ entraîne que, pour tout $K>0$ et tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}(3.46)\quad & \frac{K}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi_K(\theta^\varepsilon(t))\,\mathrm{d}x \\ & + \frac{K}{2}\int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u^\varepsilon)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(u^\varepsilon)(t)\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega \mathbf{a}(D\theta^\varepsilon)\cdot DT_K(\theta^\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t\int_\Omega B\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - \frac{f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)}{2}B^{-1}I\right)\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - \frac{f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)}{2}B^{-1}I\right)(K-T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ & = \frac{1}{4}\int_0^t\int_\Omega (f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))^2B^{-1}I\cdot I\,(K-T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + K\int_0^t\int_\Omega g\cdot\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ & + \frac{K}{2}\int_\Omega |v_0|^2\,\mathrm{d}x + \frac{K}{2}\int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi_K(\theta_0)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où I désigne la matrice identité ($I=\delta_{i,j}$).

La coercivité des tenseurs A, B et de l'opérateur $\mathbf{a}$ entraîne pour tout $K>0$ et tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned} & \frac{K}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi_K(\theta^\varepsilon(t))\,\mathrm{d}x + \delta\int_0^t\int_\Omega \big|DT_K(\theta^\varepsilon)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{K\gamma}{2}\int_0^t\int_\Omega \big|\boldsymbol{\varepsilon}(u^\varepsilon)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ & \le \frac{1}{4}\int_0^t\int_\Omega (f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))^2B^{-1}I\cdot I\,(K-T_K(\theta^\varepsilon))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + K\int_0^t\int_\Omega g\cdot\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ & + \frac{K}{2}\int_\Omega |v_0|^2\,\mathrm{d}x + \frac{K}{2}\int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi_K(\theta_0)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En divisant par $K > 0$ l'inégalité ci-dessus et en ne conservant que les deux premiers termes du membre de gauche, on obtient pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\varphi_K(\theta^\varepsilon(t))}{K}\,\mathrm{d}x \\ \leq \frac{1}{4}\int_0^t\int_\Omega (f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))^2 B^{-1}I\cdot I\frac{(K - T_K(\theta^\varepsilon))}{K}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_0^t\int_\Omega g\cdot\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ + \frac{1}{2}\int_\Omega |v_0|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\varphi_K(\theta_0)}{K}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Faisons tendre K vers 0, on a

$$\frac{K - T_K(\theta^\varepsilon)}{K} \xrightarrow{K\to 0} 2\times \mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon\leq 0\}} \quad \text{p.p. dans } Q \text{ et dans } L^\infty(Q) \text{ faible}*,$$

$$\frac{\varphi_K(\theta^\varepsilon(t))}{K} \xrightarrow{K\to 0} \left|\theta^\varepsilon\right| \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort},$$

ce qui nous donne l'inégalité suivante pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\theta^\varepsilon(t)\right|\mathrm{d}x \\ \leq \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega (f^\varepsilon(\theta^\varepsilon))^2 B^{-1}I\cdot I\times \mathbb{1}_{\{\theta^\varepsilon\leq 0\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + \int_0^t\int_\Omega g\cdot\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ + \frac{1}{2}\int_\Omega |v_0|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega A\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(u_0)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\theta_0\right|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En utilisant le comportement de la fonction f sur $\mathbb{R}^-$ (hypothèse (H-1)), et l'inégalité de Young, on en déduit qu'il existe C_1 et C_2, deux constantes indépendantes de ε (ne dépendant que de A, B, g, u_0, v_0, θ_0 et la constante C de l'hypothèse (H-1)), telles que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_\Omega |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\theta^\varepsilon(t)\right|\mathrm{d}x \leq C_1\int_0^t\int_\Omega \left(|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)|^2 + \left|\theta^\varepsilon(t)\right|\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s + C_2.$$

Le lemme de Gronwall entraîne qu'il existe $C_3 > 0$, une constante indépendante de ε, telle que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_\Omega |\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\theta^\varepsilon(t)\right|\mathrm{d}x \leq C_3, \tag{3.47}$$

et ainsi la suite $(\theta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée uniformément en ε dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$.

Utilisons cette nouvelle estimation pour démontrer la convergence, à une sous suite près, de $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ vers une solution du système **S**. Comme dans la démonstration du théorème 3.1, l'équation $(3.1)_\varepsilon$, par l'inégalité de Korn, mène à l'estimation suivante, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\|^2_{(L^2(Q))^{N\times N}} \leq C_4\left(\left\|g\right\|^2_{(L^2(Q))^N} + \left\|f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right\|^2_{L^2(Q)} + \left\|v_0\right\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \left\|u_0\right\|^2_{(H^1_0(\Omega))^N}\right),$$

où C_4 est une constante ne dépendant que de Ω, A et B.

L'inégalité ci-dessus s'écrit alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\|^2_{(L^2(Q))^{N\times N}} \leq C_5\left(1 + \left\|f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right\|^2_{L^2(Q)}\right),$$

où C_5 est une constante ne dépendant que de Ω, A, B, u_0, v_0 et g.

Ainsi, on obtient la majoration du membre de droite de $(3.2)_\varepsilon$:

$$\left\|B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - f(\theta^\varepsilon)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right)\right\|_{L^1(Q)} \leq C_6\left(1 + \left\|f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right\|^2_{L^2(Q)}\right), \tag{3.48}$$

où C_6 est une constante ne dépendant que de Ω, A, B u_0, v_0 et g.

Comme θ^ε est solution renormalisée de $(3.2)_\varepsilon$ avec la condition au limite $\theta^\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$ et la condition initiale $\theta^\varepsilon(t = 0) = \theta_0$ dans Ω, l'inégalité précédente et l'inégalité (3.33), concernant les propriétés des solutions renormalisées, pour $p = 2\alpha$ impliquent que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq C_7 \left(1 + \left\|f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right\|^2_{L^2(Q)}\right)^{\frac{N}{N+2}} \|\theta\|^{\frac{2}{N+2}}_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))},$$

où C_7 est une constante indépendante de ε.
L'inégalité (3.47) entraîne alors que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq C_7 \times C_3^{\frac{2}{N+2}} \left(1 + \left\|f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right\|^2_{L^2(Q)}\right)^{\frac{N}{N+2}}.$$

Utilisons l'hypothèse sur le comportement de f sur $\mathbb{R}^+$: on obtient alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq C_8 \left(1 + \int_Q \left|\theta^\varepsilon\right|^{2\alpha} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{N}{N+2}},$$

où C_8 est une constante indépendante de ε.

Comme $2\alpha < \frac{N+2}{N}$, l'inégalité ci-dessus et l'inégalité de Young entraînent que

$$\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L^{2\alpha}(Q)} \leq C_9, \tag{3.49}$$

où C_9 est une constante indépendante de ε.

L'inégalité (3.48) implique que

$$\left\|B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right)\right\|_{L^1(Q)} \leq C_{10},$$

où C_{10} est une constante indépendante de ε.

Choisissons q tel que $2\alpha < q < \frac{N+2}{N}$. Le résultat de compacité concernant les solutions renormalisées nous donne alors l'existence d'une fonction $\theta \in L^q(Q)$ telle que, à une sous suite près,

$$\theta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \theta \quad \text{dans } L^q(Q) \text{ fort.}$$

La continuité de f entraîne que

$$f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f(\theta) \quad \text{p.p. dans } Q,$$

et l'hypothèse de croissance concernant f implique que la suite $\left(f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\right)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^{q/\alpha}(Q)$. Comme $\frac{q}{\alpha} > 2$, par équi-continuité, on obtient que

$$f^\varepsilon(\theta^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f(\theta) \quad \text{dans } L^2(Q) \text{ fort.}$$

La linéarité par rapport à u^ε de l'équation $(3.1)_\varepsilon$ et l'inégalité de Korn entraînent que

$$u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u \quad \text{dans } L^\infty(0, T : H^1_0(\Omega)) \text{ fort,}$$
$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{\partial u}{\partial t} \text{ dans } L^2(0, T : H^1_0(\Omega)) \text{ fort,}$$

et u vérifie les régularités (3.18) et l'équation (3.21). Les résultats précédents de convergence forte entraînent clairement que

$$B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - f^\varepsilon(\theta^\varepsilon)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right)$$
$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(\theta)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) \quad \text{dans } L^1(Q) \text{ fort.}$$

Grâce aux propriétés de continuité des solutions renormalisées par rapport aux données, on en conclut que (u, θ) est une solution faible-renormalisée du système **S** au sens de la définition 3.3. Sous la condition (H-1) le théorème d'existence est démontré.

Démontrons l'existence d'une solution (u, θ) sous la condition (H-2). Dans ce cas, on note $\widetilde{f}$, la fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

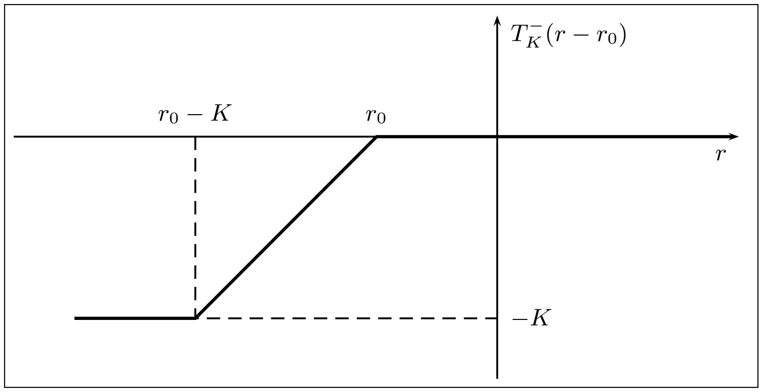
$$\widetilde{f}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq r_0, \\ f(r) & \text{si } r_0 \leq r. \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est continue et vérifie la condition (H-1) et aussi

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \quad \left|\widetilde{f}(r)\right| \leq a + M|r|^\alpha, \quad \text{avec } a \geq 0,\ M \geq 0 \text{ et } \alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{N+2}{2N}[.$$

Pour la fonction $\widetilde{f}$, nous sommes dans le cas précédent et il existe au moins un couple (u, θ), solution du système (3.1)–(3.4), dans lequel $\widetilde{f}$ remplace f, au sens de la définition 3.3. Montrons que la condition $\theta_0 \leq r_0$ p.p. dans Ω et $\widetilde{f}$ nulle sur $]-\infty, r_0]$ (avec $r_0 \leq 0$) entraînent que $\theta \geq r_0$ p.p. dans Q.

Considérons la fonction $T_K^-(r - r_0)$. On a $T_K^-(\theta - r_0) \in L^\infty(Q) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $DT_K^-(\theta - r_0) = \mathbb{1}_{\{r_0 - K < \theta < r_0\}} D\theta$ p.p. dans Q.



Pour tout $n > K + |r_0|$, d'après la définition 3.3, on a

$$\frac{\partial S_n(\theta)}{\partial t} - \operatorname{div}\big(S_n'(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta)\big) + S_n''(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta)\cdot D\theta = \\ S_n'(\theta) \times \left\{ B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \widetilde{f}(\theta)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\right\} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q)$$

où S_n est la fonction définie précédemment ($\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que S_n' soit à support compact dans $\mathbb{R}$).

Appliquons la fonction test $T_K^-(\theta - r_0)$ à l'équation ci-dessus et intégrons sur $(0,t)$, pour tout $t \in [0,T]$:

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial S_n(\theta)}{\partial t}, T_K^-(\theta - r_0)\right\rangle \mathrm{d}s + \int_0^t \int_\Omega S_n'(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta)\cdot DT_K^-(\theta - r_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ + \int_0^t \int_\Omega T_K^-(\theta - r_0)S_n''(\theta)\,\mathbf{a}(D\theta)\cdot D\theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ = \int_0^t \int_\Omega T_K^-(\theta - r_0)S_n'(\theta) \times \left\{ B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \widetilde{f}(\theta)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s. \tag{3.50}$$

Pour $n > K + |r_0|$, on a $T_K^-(\theta - r_0) = T_K^-(S_n(\theta) - r_0)$ p.p. dans Q, ce qui nous donne, par le lemme 2.4 de [10], pour le premier terme du membre de gauche de (3.50),

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial S_n(\theta)}{\partial t}, T_K^-(\theta - r_0)\right\rangle \mathrm{d}s = \int_0^t \left\langle \frac{\partial S_n(\theta)}{\partial t}, T_K^-(S_n(\theta) - r_0)\right\rangle \mathrm{d}s \\ = \int_\Omega \varphi_K\big((S_n(\theta(t)) - r_0)^-\big)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi_K\big((S_n(\theta_0) - r_0)^-\big)\,\mathrm{d}x.$$

L'hypothèse $\theta_0 \geq r_0$ p.p. dans Ω implique que

$$\int_0^t \left\langle \frac{\partial S_n(\theta)}{\partial t}, T_K^-(\theta - r_0)\right\rangle \mathrm{d}s = \int_\Omega \varphi_K\big((S_n(\theta(t)) - r_0)^-\big)\,\mathrm{d}x.$$

De la même façon que pour obtenir l'égalité (3.28) (propriétés des solutions renormalisées), on démontre que l'on obtient en passant à la limite dans l'égalité (3.50) que, pour tout $K > 0$ et tout $t \in [0,T]$,

$$\int_\Omega \varphi_K\big((\theta(t) - r_0)^-\big)\,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_\Omega \mathbf{a}(D\theta)\cdot DT_K^-(\theta - r_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\ = \int_0^t \int_\Omega T_K^-(\theta - r_0) \times \left\{ B\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \widetilde{f}(\theta)\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.$$

Comme la fonction $\widetilde{f}$ est nulle sur $[-\infty, r_0]$, on a $T_K^-(\theta - r_0)\widetilde{f}(\theta) = 0$ p.p. dans Q. La fonction $T_K^-(r - r_0)$ étant négative, la coercivité du tenseur B et de l'opérateur **a**, implique que, pour tout $K > 0$ et tout $t \in [0, T]$,

$$\int_\Omega \varphi_K\big((\theta(t) - r_0)^-\big)\,\mathrm{d}x \leq 0,$$

ce qui entraîne, d'après la définition de φ_K, $\theta \geq r_0$ p.p. dans Q.

Comme $\theta \geq r_0$, on obtient que $f(\theta) = \widetilde{f}(\theta)$ et ainsi (u, θ) est une solution du système **S**, au sens de la définition 3.3, telle que $\theta \geq r_0$ p.p. dans Q. Sous l'hypothèse H-2, le théorème est démontré. ■

Remarque 3.7 L'analyse de la démonstration du théorème 3.2 montre que, si la fonction continue f vérifie uniquement l'hypothèse (H-1) et sans condition de croissance sur $\mathbb{R}^+$, une solution $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ du problème approché vérifie l'estimation (3.47). On obtient alors que pour tout $K > 0$, $T_K(\theta^\varepsilon)$ est bornée uniformément en ε dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Bibliographie

[1] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, et J.L. Vazquez. « An L^1-Theory of Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations ». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 22 :241–273, 1995.

[2] A. Betta, F. Mercaldo, F. Murat, et M. Porzio. à paraître.

[3] D. Blanchard. « Truncation and monotonicity methods for parabolic equations ». *Nonlinear Anal. TMA*, 21(10) :725–743, 1993.

[4] D. Blanchard et O. Guibé. « Existence d'une solution pour un système non linéaire en thermoviscoélasticité ». *C.R. Acad. Sci. Paris.*, série I, t. 325 :1125–1130, 1997.

[5] D. Blanchard et F. Murat. « Renormalized solutions of nonlinear parabolic problems with L^1 data : existence and uniqueness ». À paraître dans Proc. Roy. Sci. Edinburgh.

[6] L. Boccardo, J.I. Diaz, D. Giachetti, et F. Murat. « Existence and regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivations of nonlinear terms ». *J. Diff. Eq.*, 106 :215–237, 1993.

[7] L. Boccardo et T. Gallouët. « On some nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data ». *J. Funct. Anal.*, 87 :149–169, 1989.

[8] L. Boccardo et T. Gallouët. « Nonlinear elliptic equations with right hand side measures ». *Comm. Partial Differential Equations*, 17(n 3&4) :641–655, 1992.

[9] L. Boccardo, T. Gallouët, et L. Orsina. « Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data ». *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 13(5) :539–551, 1996.

[10] L. Boccardo, F. Murat, et J.P. Puel. « Existence results for some quasilinear parabolic equations ». *Nonlinear Anal. TMA*, 13 :373–392, 1989.

[11] B. Climent et E Fernández-Cara. « Existence an uniqueness results for a coupled problem related to the stationary Navier-Stokes ». *J. Math. Pures Appl.*, 76(4), 1997.

[12] A. Dall'aglio et L. Orsina. « Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and L^1 data ». *Nonlinear Analysis*, 27 :59–73, 1996.

[13] R. Dautray et J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique*, volume 3. Masson, Paris, 1984.

[14] R.J. Di Perna et P.-L. Lions. « On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability ». *Ann. of Math.*, 130(2) :321–366, 1989.

[15] R.J. Di Perna et P.-L. Lions. « Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory ». *Invent. Math.*, 98 :511–547, 1989.

[16] G. Duvaut et J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.

[17] G.A. Francfort. « Homogenization and Linear Thermoelasticity ». *SIAM J. Math. Anal.*, 14(4) :696–708, 1984.

[18] T. Gallouët et R. Herbin. « Existence of a solution to a coupled elliptic system ». *Appl. Math. Letters*, 7 :49–55, 1994.

[19] P. Germain. *Cours de Mécanique des Milieux Continus, tome 1 : théorie générale*. Masson et Cie, Paris, 1973.

[20] J. Leray et J.-L. Lions. « Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder ». *Bull. Soc. Math. France*, 93 :97–107, 1965.

[21] R. Lewandowski. *Analyse mathématique et océanographie*. Masson, Paris, 1997.

[22] R. Lewandowski et F. Murat. à paraître.

[23] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[24] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 1 : Incompressible Models*. Oxford lecture series in mathematics and its applications.3., 1996.

[25] P.-L. Lions et F. Murat. « Solutions renormalisées d'équations elliptiques ». (À paraître).

[26] F. Murat. « Soluciones renormalizadas de EDP elipticas non lineales ». Rapport Technique R93023, Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris VI, 1993. Cours à l'Université de Séville.

[27] F. Murat. « Equations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure ». Dans *Compte Rendus du 26ème Congrès d'Analyse Numérique*, les Karellis, 1994.

[28] A. Prignet. « Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel ». Thèse de Doctorat, E.N.S. Lyon, 1997.

[29] J. Simon. « Compact sets in $L^p(0,T;B)$ ». *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 146(4) :65–96, 1987.

[30] P. Suquet. « Plasticité et homogénéisation ». Thèse de doctorat ès-Sciences, Université Pierre-et-Marie-Curie, 1982.

[31] J.L. Vazquez. « Equivalenza tra Entropia, SOLA e Rinormalizzata ». Proceedings Fès, 1995.