**Université de Rouen**
**Faculté des Sciences**

**Licence de Mathématiques. Topologie 1993-1994**

Contrôle du Devoir N$^o$ 2

Aucun document n'est autorisé.

**Exercice 1 :**

Soit $E$ un espace localement compact et $\big(\Omega_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans $E$.

*a*) Montrer que si $O_0$ est un ouvert non vide, on peut construire une suite $\big(O_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'ouverts non vides relativement compacts telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\overline{O_{n+1}} \subset O_n \cap \Omega_n$.

*b*) Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{O_n} \neq \emptyset$. En déduire que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans $E$.

*c*) Montrer que si $E$ est réunion dénombrable de fermés, alors un au moins de ces fermés est d'intérieur non vide.

**Exercice 2 :** Soient $E$ un espace vectoriel normé, $A$ une partie compacte et $B$ une partie fermée de $E$. Montrer que :

- $A+B$ est fermé dans $E$.
- si de plus $B$ est compacte, alors $A+B$ est compacte.

**Exercice 3 :** Soient $E$ un espace topologique, $F$ un espace topologique séparé et $f$, $g$ deux applications continues de $E$ dans $F$. Montrer que : $\big\{x \in E / f(x) = g(x)\big\}$ est un fermé de $E$.

**Exercice 4 :**

Soit $E$ un espace métrique compact. Soit $f$ une application de $E$ dans $E$ vérifiant :

$$\forall x, y \in E \quad d\big(f(x), f(y)\big) \geq d(x, y)$$

*a*) Soit $x, y \in E$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N}^* \;\; \text{tel que} \;\; \begin{cases} d\big(x, f^k(x)\big) \leq \varepsilon \\ d\big(y, f^k(y)\big) \leq \varepsilon \end{cases}$$

*b*) En déduire que $f(E)$ est dense dans $E$ et que $\forall x, y \in E \quad d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y)$.

*c*) Montrer que $f$ est une isométrie de $E$ sur $E$.

*d*) En déduire que tout sous espace de $E$ isométrique à $E$ est identique à $E$.